

Научно-исследовательская статья/Applied research article

УДК 528.024.1:551.466.7

<https://doi.org/10.33764/2411-1759-2026-31-5-21-33>

Разложение приливного потенциала по сферическим гармоникам до пятой степени

В. Ф. Канушин¹, Д. Н. Голдобин¹, Н. Н. Кобелева¹✉

¹ Сибирский государственный университет геосистем и технологий, г. Новосибирск,
Российская Федерация

e-mail: n.n.kobeleva@mail.ru

Аннотация. Разложение лунно-солнечного приливного потенциала на поверхности Земли в аналитические ряды является классической задачей теории земных приливов, решение которой постоянно уточняется уже около 140 лет. Данные разложения приливного потенциала широко применяются при исследовании земных приливов, а также при решении задач современной теории прецессии и нутации Земли. В статье представлена модель приливного потенциала в виде гармонического разложения по полиномам Лежандра до пятой степени включительно, причем каждая гармоника соответствует определенной периодичности приливов. Целью статьи является разработка алгоритмов для получения моделей, составляющих приливного потенциала и его вертикальных производных до пятой степени гармонического разложения, обусловленных гравитационным влиянием Луны, Солнца и планет Солнечной системы. Приведены результаты вычисления модели приливного потенциала и его вертикальной производной для Новосибирска в течение 2025 г. Выполнено сравнение результатов вычисления вертикальной производной приливного потенциала с данными наблюдений приливной вариации силы тяжести, полученными по результатам измерений гравиметром Scintrex CG-6 Autograv. Установлена высокая корреляция между экспериментально измеренными и вычисленными на основе модели значениями приливных вариаций силы тяжести.

Ключевые слова: гравитация, полиномы Лежандра, сферические гармоники, приливный потенциал, постоянная Дудсена, приливные вариации силы тяжести, гравиметрические измерения, гравитационное поле Земли, Луна, Солнце, планеты Солнечной системы

Для цитирования:

Канушин В. Ф., Голдобин Д. Н., Кобелева Н. Н. Разложение приливного потенциала по сферическим гармоникам до пятой степени. *Вестник СГУГиТ*. 2026. Т. 31, № 5. С. 21–33. <https://doi.org/10.33764/2411-1759-2026-31-5-21-33>

Decomposition of the tidal potential up to the 5th degree using spherical harmonics

V. F. Kanushin¹, D. N. Goldobin¹, N. N. Kobeleva¹✉

¹ Siberian State University of Geosystems and Technologies, Novosibirsk, Russian Federation

e-mail: n.n.kobeleva@mail.ru

Abstract. The analytical decomposition of the lunisolar tidal potential is a classical, century-old problem in geodynamics, serving as a fundamental constraint for modern theories of Earth orientation parameters, specifically precession and nutation. The study presents a high-fidelity tidal potential model expressed as a harmonic expansion in terms of Legendre polynomials up to the 5th degree, where each term corresponds to a distinct tidal periodicity. The authors developed a comprehensive

computational framework to derive the constituent components of the tidal potential and its vertical derivatives (up to the 5th order) induced by the gravitational perturbations of the Moon, the Sun, and the major planets. The model's performance is validated through a high-precision case study conducted in Novosibirsk over the span of 2025. The comparison of the theoretical gravity tides, specifically the first vertical derivative of the potential, with observational data recorded by a Scintrex CG-6 Autograv gravimeter was carried out. The results demonstrate a strong agreement between the experimentally observed gravity variations and the model-derived predictions.

Keywords: gravity, Legendre polynomials, spherical harmonics, tidal potential, Dudsen constant, tidal variations of gravity, gravimetric measurements, gravitational field of the Earth, Moon, Sun, planets of the Solar system

For citation:

Kanushin V. F., Goldobin D. N., Kobeleva N. N. (2026). Decomposition of the tidal potential up to the 5th degree using spherical harmonics. *Vestnik SSUGiT [Vestnik SSUGT]* Vol. 31, No. 5. pp. 21–33. <https://doi.org/10.33764/2411-1759-2025-31-5-21-33>

Введение

В настоящее время возрастает необходимость оценки и учета влияния вариаций гравитационного потенциала и силы тяжести на результаты высокоточных геодезических измерений. Значимость постановки и решения данной задачи для повышения точности геодезических определений была отмечена еще в 1957 г. выдающимся ученым М. С. Молоденским, который указывал на необходимость учета изменений гравитационного поля Земли при выполнении высокоточных измерений [1]. В последние годы вопросам моделирования приливных эффектов и вариаций силы тяжести уделяется значительное внимание как в отечественных, так и в зарубежных исследованиях [2–4].

Возможность и необходимость учета влияния земных приливов на результаты геодезических измерений обусловлены тремя причинами: повышением точности современного определения координат точек до величины, соизмеримой с влиянием приливов; повышением точности приливных измерений; разработкой теоретической модели, обеспечивающей вычисление влияния прилива по результатам наблюдений [5].

При наблюдениях на геодезических пунктах используется астрономическая горизонтальная топоцентрическая система координат $OX^T Y^T Z^T$, в которой ось Z^T направлена в астрономический зенит и совпадает с направлением отвеса. Так как приливные влия-

ния вызывают колебания направления отвеса и смещение земной коры, то геодезические измерения, выполняемые на одном и том же пункте в различные моменты времени, выполняются в своей собственной мгновенной топоцентрической системе координат. Поскольку гравитационное воздействие Луны и Солнца изменяется в зависимости от положения точки на поверхности Земли, при выполнении высокоточных геодезических измерений возникает необходимость учета приливных влияний. Вопросы геодезических аспектов приливных воздействий рассматривались Международной ассоциацией геодезии (МАГ) на заседании в Канберре (Австралия) в 1979 г., по результатам которого было принято решение о необходимости исключения приливного влияния из результатов геодезических измерений [6]. Оно соответствует требованиям, возникающим при решении краевой задачи для определения возмущающего потенциала, согласно которым аномалии силы тяжести должны отражать влияние только аномальных масс внутри Земли [7].

Одним из основных методов математического описания приливных явлений служит представление приливообразующего потенциала на поверхности Земли в виде аналитических рядов. Данная задача относится к числу классических задач геодезии и небесной механики. Следует отметить, что методы ее решения и математические модели непрерывно совершенствуются почти 140 лет. Наиболее точные до недавнего

времени разложения приливообразующего потенциала были представлены в работе [8], основанной на применении аналитического метода, а также в исследованиях L. Hartmann и W. Wenzel [9], в которых использовался спектральный анализ Фурье по таблицам значений потенциала, вычисленных для временного интервала 1850–2150 гг. с использованием численной эфемериды DE-200 [10], впоследствии утратившей актуальность [11, 12].

В отличие от ранее предложенных подходов, в настоящем исследовании применяется оригинальный метод гармонического разложения по полиномам Лежандра до пятой степени включительно функции от координат Луны, Солнца и планет, где в качестве источника координат возмущающих тел используются наиболее точные на сегодняшний день долгосрочные численные эфемериды Луны и планет DE/LE-406 [13].

В рамках исследования рассматривается прямое приливное влияние на гравитационное поле Земли. При этом Земля считается

твердым недеформируемым телом, небесное тело – материальной точкой с массой M .

Целью данной статьи является разработка алгоритмов для получения моделей, составляющих приливного потенциала и его вертикальных производных до пятой степени гармонического разложения, обусловленных гравитационным влиянием Луны, Солнца и всех планет Солнечной системы.

Для достижения поставленной цели необходимо представить модель приливного потенциала в виде разложения по сферическим функциям до пятой степени включительно, а также выполнить сравнение результатов вычисления вертикальной производной приливного потенциала с данными наблюдений приливных вариаций силы тяжести.

Методы и материалы

Классическая форма приливного потенциала W_B , создаваемого внешним телом с индексом B в точке P в момент T на поверхности Земли, представлена как в работе [8]

$$W_B = \frac{GM_B}{d_B} \left(\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{r'}{d_B} \right)^n P_n(\cos \psi) \right) = \sum_{n=2}^{\infty} W_B^n, \quad (1)$$

где $P_n(\cos \psi)$ – полином Лежандра степени n (из-за дополнительного эффекта сжатия Земли он начинается при $n = 1$ вместо классического расширения, которое начинается при $n = 2$;

d_B – мгновенное расстояние между Землей и возмущающим телом B ;

r' – расстояние между центром Земли и положением станции на ее поверхности.

Выражение (1) обычно преобразуется к следующему виду:

$$W_B = \frac{3GM_B}{4} \frac{a^2}{c_B^3} \left(\frac{r'}{a} \right)^2 \left(\frac{c_B}{d_B} \right)^3 \left[\frac{4}{3} P_2(\cos \psi) + \frac{4}{3} \frac{r'}{d_B} P_3(\cos \psi) + \right. \\ \left. \frac{4}{3} \left(\frac{r'}{4d_B} \right)^2 P_4(\cos \psi) + \frac{4}{3} \left(\frac{r'}{4d_B} \right)^3 P_5(\cos \psi) + \dots \right], \quad (2)$$

где a – большая полуось эллипсоида; c_B – среднее расстояние между Землей и возмущающим телом B .

Первая часть формулы (2) – это масштабный коэффициент, введенный Дудсоном в 1922 г. [14], зависящий от геоцентрического расстояния c_B до возмущающего тела B . Для Луны этот масштабный коэффициент равен

$$D_M(r') = D_1 \left(\frac{r'}{a} \right)^2 = \frac{3}{4} GM_M \frac{a^2}{c_M^3} \left(\frac{r'}{a} \right)^2, \quad (3)$$

где D_1 – константа, называемая постоянной Дудсона для Луны, определенная в работе [15]; M_M – масса Луны.

На рис. 1 представлен график изменения масштабного коэффициента $D_M(r')$, вычисленного по формуле (3) для Луны в период с 23.01 по 09.12.2025.

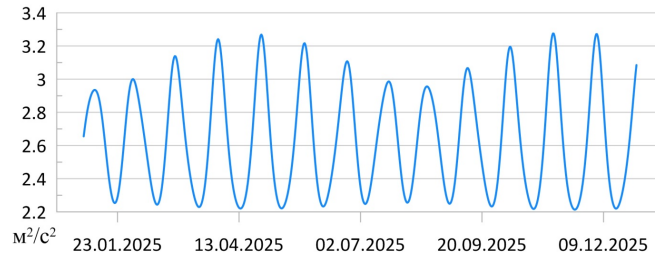


Рис. 1. График изменения масштабного коэффициента $D(r')$ для Луны

Из рис. 2 следует, что в течение 2025 г. масштабный коэффициент $D(r')$ для Луны изменялся в диапазоне от 2,210 до 3,275 м²/с².

Для Солнца масштабный коэффициент $D_S(r')$ равен

$$D_S(r') = D_S \left(\frac{r'}{a} \right)^2 = \frac{3}{4} G M_S \frac{a^2}{c_S^3} \left(\frac{r'}{a} \right)^2, \quad (4)$$

где D_S – постоянная Дудсона для Солнца; M_S – масса Солнца; c_S – геоцентрическое расстояние до Солнца.

На рис. 2 приведен график изменения масштабного коэффициента $D_S(r')$, вычисленного по формуле (4) для Солнца с 23.01 по 09.12.2025.

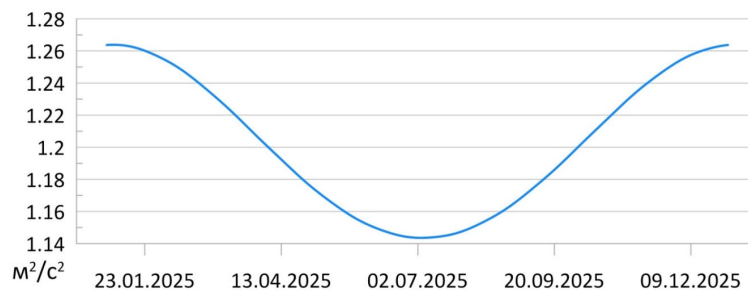


Рис. 2. График изменения масштабного коэффициента $D_S(r')$ для Солнца

Согласно данным, представленным на рис. 3, в течение 2025 г. масштабный коэффициент $D_S(r')$ для Солнца изменялся в пределах от 1,144 до 1,264 м²/с².

Для любого другого тела B можно ввести аналогичный масштабный коэффициент $D_B(r)$

$$D_B(r) = \frac{M_B}{M_M} \frac{c_B^3}{c_M^3} D(r'), \quad (5)$$

где M_B – масса небесного тела B .

Графики изменения масштабного коэффициента $D_B(r')$, вычисленного по фор-

муде (5) для планет Солнечной системы, показывают, что его значения убывают по величине от $6,86 \times 10^{-6} \text{ м}^2 / \text{с}^2$ для Меркурия до $2,33 \times 10^{-9} \text{ м}^2 / \text{с}^2$ для Нептуна.

В табл. 1 приведены статистические параметры распределения значений масштабных коэффициентов $D_M(r'), D_S(r'), D_B(r')$, вычисленных по формулам (3)–(5) за период с 23.01 по 09.12. 2025.

Таблица 1. Параметры распределения значений масштабных коэффициентов $D_M(r'), D_S(r'), D_B(r')$

Небесное тело	Мин. ($\text{м}^2/\text{с}^2$)	Макс. ($\text{м}^2/\text{с}^2$)	Диапазон ($\text{м}^2/\text{с}^2$)	Среднее ($\text{м}^2/\text{с}^2$)
Луна	2,213	3,275	1,062	2,635
Солнце	1,144	1,264	0,120	1,202
Меркурий	$1,96 \times 10^{-6}$	$6,86 \times 10^{-6}$	$4,90 \times 10^{-6}$	$3,62 \times 10^{-6}$
Венера	$7,62 \times 10^{-6}$	$7,93 \times 10^{-6}$	$3,16 \times 10^{-7}$	$7,80 \times 10^{-6}$
Марс	$8,39 \times 10^{-8}$	$1,33 \times 10^{-7}$	$4,87 \times 10^{-8}$	$9,67 \times 10^{-8}$
Юпитер	$8,11 \times 10^{-6}$	$8,74 \times 10^{-6}$	$6,33 \times 10^{-7}$	$8,42 \times 10^{-6}$
Сатурн	$3,85 \times 10^{-7}$	$3,98 \times 10^{-7}$	$1,37 \times 10^{-8}$	$3,91 \times 10^{-7}$
Уран	$7,03 \times 10^{-7}$	$7,10 \times 10^{-9}$	$6,83 \times 10^{-11}$	$7,06 \times 10^{-9}$
Нептун	$2,33 \times 10^{-9}$	$2,33 \times 10^{-9}$	$2,20 \times 10^{-12}$	$2,33 \times 10^{-9}$

Приведенные в табл. 1 средние значения масштабных коэффициентов можно использовать для приближенных вычислений приливных поправок и включить числовые множители $D_S(r')/D_M(r')$ и $D_B(r')/D_M(r')$ в числовые коэффициенты солнечной и планетарной частей приливного потенциала (2).

Выражения сферических функций $P_n(\cos \psi)$ в формуле (2) для степеней $n = 2, \dots, 5$ в аналитической форме имеют следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} P_2(\cos \psi) &= \frac{3}{2} \cos^2 \psi - \frac{1}{2}, \\ P_3(\cos \psi) &= \frac{5}{2} \cos^3 \psi - \frac{3}{2} \cos \psi, \\ P_4(\cos \psi) &= \frac{35}{8} \cos^4 \psi - \frac{15}{4} \cos^2 \psi + \frac{3}{8}, \\ P_5(\cos \psi) &= \frac{63}{8} \cos^5 \psi - \frac{35}{4} \cos^3 \psi + \frac{15}{8} \cos \psi. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Подстановка выражения (6) в формулу (2) позволяет получить выражение для приливного потенциала

$$W_B = \frac{3GM_B}{4} \frac{a^2}{c_B^3} \left(\frac{r'}{a} \right)^2 \left(\frac{c_B}{d_B} \right)^3 \frac{2}{3} \left[\begin{aligned} &\left(3\cos^2 \psi - 1 \right) + \frac{r'}{d_B} \left(5\cos^3 \psi - 3\cos \psi \right) + \\ &+ \frac{r'^2}{4d_B^2} \left(35\cos^4 \psi - 3\cos^2 \psi + 3 \right) + \\ &+ \frac{r'^3}{4d_B^3} \left(63\cos^5 \psi - 70\cos^3 \psi + 15\cos \psi \right) + \dots \end{aligned} \right]. \quad (7)$$

Однако формула (7) для вычисления приливного потенциала W_B неудобна, так как переменная ψ связана с локальной системой координат. В связи с этим используется стандартная экваториальная система координат, связанная с Землей, в которой (H, δ) , где H – часовой угол, δ – склонение небесного тела, а φ и λ – соответственно географические широта и долгота пункта наблюдения.

Тогда согласно теореме косинусов для сферического треугольника имеем

$$\cos \psi = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos H. \quad (8)$$

В выражениях для $P_n(\cos \psi)$ в формулы (6) входят числовые коэффициенты и различные степени $\cos \psi$. Косинусы, возведенные в степени $n = 2, \dots, 5$ могут быть представлены следующим соотношением:

$$\cos^n \psi = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (\sin \varphi \sin \delta)^{n-k} (\cos \varphi \cos \delta \cos H)^k. \quad (9)$$

Подставляя значения $\cos \psi$ и $\cos^n \psi$ из формул (8) и (9) в выражение приливного потенциала (7), получим выражения для составляющих приливного потенциала W_B^n , начиная со второй до пятой степени n , которые имеют следующий вид:

$$W_B^2 = D_B (r') \left(\frac{c_B}{d_B} \right)^3 \times \left[\left(1 - 3 \sin^2 \varphi \right) \left(\frac{1}{3} - \sin^2 \delta \right) + \sin 2\varphi \sin 2\delta \cos H + \right. \\ \left. + \cos^2 \varphi \cos^2 \delta \cos 2H \right], \quad (10)$$

$$W_B^3 = D_B (r') \left(\frac{r'}{a} \right) \left(\frac{c_B}{d_B} \right)^4 \sin \pi_B \times \left[\frac{1}{3} \sin \varphi (3 - 5 \sin^2 \varphi) \sin \delta (3 - 5 \sin^2 \delta) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \cos \varphi (1 - 5 \sin^2 \varphi) \cos \delta (1 - 5 \sin^2 \delta) \cos H + \right. \\ \left. + 5 \cos^2 \varphi \sin \varphi \sin \delta \cos^2 \delta \cos 2H + \right. \\ \left. + \frac{5}{6} \cos^3 \varphi \cos^2 \delta \cos 3H \right], \quad (11)$$

$$W_B^4 = D_B (r') \left(\frac{r'}{a} \right)^2 \left(\frac{c_B}{d_B} \right)^5 \sin^2 \pi_B \times \left[\frac{1}{48} (3 - 30 \sin^2 \varphi + 35 \sin^4 \varphi) (3 - 30 \sin^2 \delta + 35 \sin^4 \delta) + \right. \\ \left. + \frac{5}{24} \sin 2\varphi (3 - 7 \sin^2 \varphi) \sin 2\delta (3 - 7 \sin^2 \delta) \cos H + \right. \\ \left. + \frac{5}{12} \cos^2 \varphi (1 - 7 \sin^2 \varphi) \cos^2 \delta (1 - 7 \sin^2 \delta) \cos 2H + \right. \\ \left. + \frac{35}{6} \sin \varphi \cos^3 \varphi \sin \delta \cos^2 \delta \cos 3H + \right. \\ \left. + \frac{35}{48} \cos^4 \varphi \cos^4 \delta \cos 4H \right], \quad (12)$$

$$W_B^5 = D_B (r') \left(\frac{r'}{a} \right)^3 \left(\frac{c_B}{d_B} \right)^6 \sin^3 \pi_B \times \\ \times \left[\frac{1}{48} \sin \varphi (15 - 70 \sin^2 \varphi + 63 \sin^4 \varphi) \sin \delta (15 - 70 \sin^2 \delta + 63 \sin^4 \delta) + \right. \\ \left. + \frac{5}{16} \cos \varphi (-1 + 14 \sin^2 \varphi - 21 \sin^4 \varphi) \cos \delta (-1 + 14 \sin^2 \delta - 21 \sin^4 \delta) \cos H + \right. \\ \left. + \frac{35}{4} \sin \varphi (-1 + 4 \sin^2 \varphi - 3 \sin^4 \varphi) \sin \delta (-1 + 4 \sin^2 \delta - 3 \sin^4 \delta) \cos 2H + \right. \\ \left. + \frac{35}{96} \cos^3 \varphi (1 - 9 \sin^2 \varphi) \cos^3 \delta (1 - 9 \sin^2 \delta) \cos 3H + \right. \\ \left. + \frac{105}{16} \sin \varphi (1 - 2 \sin^2 \varphi + \sin^4 \varphi) \sin \delta (1 - 2 \sin^2 \delta + \sin^4 \delta) \cos 4H + \right. \\ \left. + \frac{21}{32} \cos^5 \varphi \cos^5 \delta \cos 5H \right]. \quad (13)$$

Учет возмущений от твердых земных приливов был выполнен с использованием модифицированной программной библиотеки SOFA, рекомендованной Международным астрономическим союзом (IAU) [16].

Результаты исследования

Результаты вычисления по формулам (10)–(13) составляющих приливного потенциала, начиная со второй до пятой степени, обусловленных гравитационным притяжением Луны, приведены в виде графиков на рис. 3.

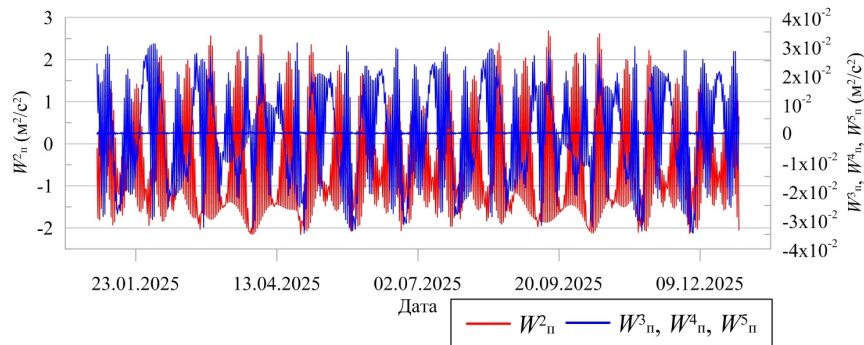


Рис. 3. Графики изменения во времени составляющих приливного потенциала, обусловленных гравитационным притяжением Луны

В табл. 2 приведены статистические параметры распределения составляющих лунного приливного потенциала, вычисленных по формулам (10)–(13).

Таблица 2. Параметры распределения составляющих лунного приливного потенциала

Статистические величины	W^2	W^3	W^4	W^5	W
Мин.	– 2,156	– 0,035	– 0,002	– $9 \cdot 10^{-06}$	– 2,155
Макс.	2,680	0,031	0,001	$8 \cdot 10^{-06}$	2,708
Диапазон	4,836	0,066	0,003	$2 \cdot 10^{-05}$	4,863
Среднее	– 0,581	– $7 \cdot 10^{-05}$	– $5 \cdot 10^{-06}$	– $1 \cdot 10^{-07}$	– 0,581

Приведенные в табл. 2 параметры распределения изменения во времени составляющих лунного приливного потенциала W_B^n показали, что составляющая второй степени W_B^2 превосходит в максимуме по величине составляющие потенциалов третьей степени W_B^3 в 90 раз, четвертой W_B^4 и пятой W_B^5 – более чем в 30 000 раз.

На рис. 4 приведены в виде графиков результаты вычисления по формулам (10)–(13) составляющих солнечного приливного потенциала W_B^n до пятой степени.

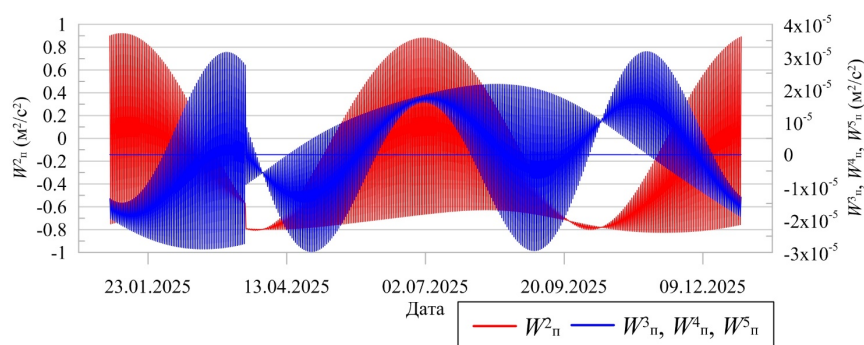


Рис. 4. График изменения во времени составляющих приливного потенциала, обусловленных гравитационным притяжением Солнца

В табл. 3 приведены параметры распределения составляющих солнечного приливного потенциала.

Таблица 3. Параметры распределения составляющих солнечного приливного потенциала

Статистические величины	W^2	W^3	W^4	W^5	W
Мин.	-0,826	$-2,9 \cdot 10^{-05}$	$-1,3 \times 10^{-09}$	$-4,8 \times 10^{-14}$	-0,826
Макс.	0,920	$3,1 \cdot 10^{-05}$	$1,1 \times 10^{-09}$	$5,7 \times 10^{-14}$	0,920
Диапазон	1,745	$6,1 \cdot 10^{-05}$	$2,5 \times 10^{-09}$	$1,1 \times 10^{-13}$	1,745
Среднее	-0,301	$2,9 \cdot 10^{-07}$	$-1,4 \times 10^{-10}$	$4,9 \times 10^{-16}$	-0,301

Анализ результатов, представленных в табл. 3, показывает, что составляющая солнечного приливного потенциала второй степени на несколько порядков превышает остальные гармонические составляющие солнечного приливного потенциала.

Порядок величин составляющих приливного потенциала, обусловленных воздействием планет, находится в диапазоне от 10^{-6} до 10^{-11} м²/с². При этом максимальные значения приливных составляющих наблюдаются у Юпитера и достигают $6,5 \times 10^{-6}$ м²/с².

Для подтверждения теоретических расчетов составляющих потенциала приливного притяжения небесных тел W_B^n , представленных в табл. 2 и 3, выполнено сравнение фактических вариаций силы тяжести, вызванных лунно-солнечным приливом, с теоретическими вертикальными составляющими приливной силы. Указанные составляющие получены путем дифференцирования выражений (10)–(13) по вертикали r' и имеют следующий вид:

$$\delta g_B^2 = -1.15 \cdot GM_B \frac{r'}{d_B^3} \left[\begin{aligned} & \left(1 - 3 \sin^2 \varphi\right) \left(\frac{1}{3} - \sin^2 \delta\right) + \\ & + \sin 2\varphi \sin 2\delta \cos H + \\ & + \cos^2 \varphi \cos^2 \delta \cos 2H \end{aligned} \right], \quad (14)$$

$$\delta g_B^3 = -1,15 \cdot GM_B \frac{3}{2} \frac{r'^2}{d_B^4} \left[\begin{aligned} & \frac{1}{3} \sin \varphi (3 - 5 \sin^2 \varphi) \sin \delta (3 - 5 \sin^2 \delta) + \\ & + \frac{1}{2} \cos \varphi (1 - 5 \sin^2 \varphi) \cos \delta (1 - 5 \sin^2 \delta) \cos H + \\ & + 5 \cos^2 \varphi \sin \varphi \sin \delta \cos^2 \delta \cos 2H + \\ & + \frac{5}{6} \cos^3 \varphi \cos^2 \delta \cos 3H \end{aligned} \right], \quad (15)$$

$$\delta g_B^4 = -1,15 \cdot GM_B 3 \frac{r'^3}{d_B^5} \cdot \left[\begin{aligned} & \frac{1}{48} (3 - 30 \sin^2 \varphi + 35 \sin^4 \varphi) (3 - 30 \sin^2 \delta + 35 \sin^4 \delta) + \\ & + \frac{5}{24} \sin 2\varphi (3 - 7 \sin^2 \varphi) \sin 2\delta (3 - 7 \sin^2 \delta) \cos H + \\ & + \frac{5}{12} \cos^2 \varphi (1 - 7 \sin^2 \varphi) \cos^2 \delta (1 - 7 \sin^2 \delta) \cos 2H + \\ & + \frac{35}{6} \sin \varphi \cos^3 \varphi \sin \delta \cos^2 \delta \cos 3H + \\ & + \frac{35}{48} \cos^4 \varphi \cos^4 \delta \cos 4H \end{aligned} \right], \quad (16)$$

$$\delta g_B^5 = -1,15 \cdot GM_B \frac{18}{4} \frac{r'^5}{d_B^6} \times \left[\begin{aligned} & \frac{1}{48} \sin \varphi (15 - 70 \sin^2 \varphi + 63 \sin^4 \varphi) \sin \delta (15 - 70 \sin^2 \delta + 63 \sin^4 \delta) + \\ & + \frac{5}{16} \cos \varphi (-1 + 14 \sin^2 \varphi - 21 \sin^4 \varphi) \cos \delta (-1 + 14 \sin^2 \delta - 21 \sin^4 \delta) \cos H + \\ & + \frac{35}{4} \sin \varphi (-1 + 4 \sin^2 \varphi - 3 \sin^4 \varphi) \sin \delta (-1 + 4 \sin^2 \delta - 3 \sin^4 \delta) \cos 2H + \\ & + \frac{35}{96} \cos^3 \varphi (1 - 9 \sin^2 \varphi) \cos^3 \delta (1 - 9 \sin^2 \delta) \cos 3H \\ & + \frac{105}{16} \sin \varphi (1 - 2 \sin^2 \varphi + \sin^4 \varphi) \sin \delta (1 - 2 \sin^2 \delta + \sin^4 \delta) \cos 4H + \\ & + \frac{21}{32} \cos^5 \varphi \cos^5 \delta \cos 5H \end{aligned} \right]. \quad (17)$$

Наблюдения вариаций силы тяжести, обусловленных лунно-солнечными приливами, выполнялись с использованием двух современных гравиметров Scintrex CG-6 Autograv в течение четырех суток – с 28.03 по 01.04.2025 внутри здания лабораторного корпуса Сибирского государственного университета геосистем и технологий.

По результатам наблюдений, выполненных с использованием гравиметров, и расчетных значений приливных вариаций силы тяжести, полученных по формулам (14)–(17), были построены графики, представленные на рис. 5.

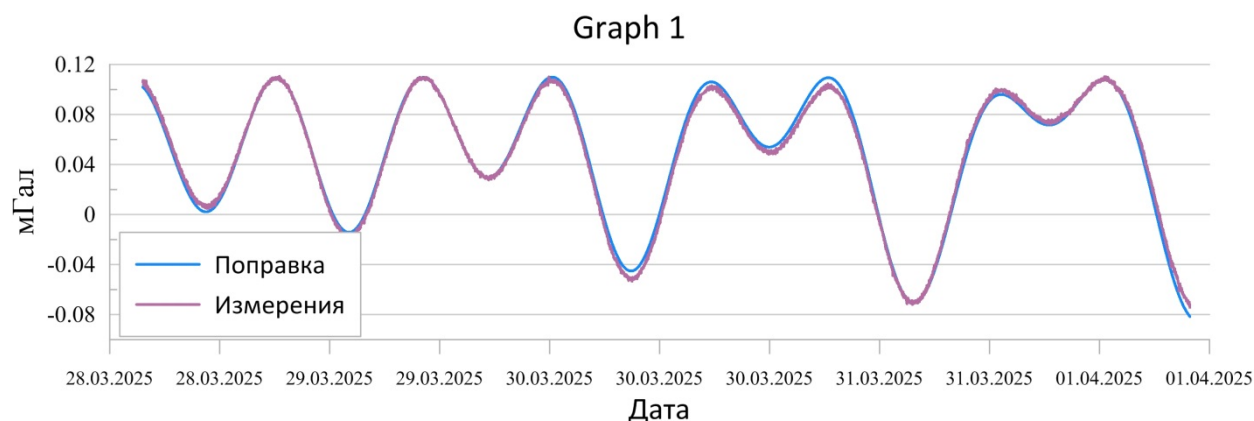


Рис. 5. Графики приливной вариации силы тяжести

Как следует из рис. 6, теоретически рассчитанные и экспериментально измеренные приливные вариации силы тяжести характеризуются высокой степенью согласованности. Коэффициент корреляции между расчетными и наблюдаемыми значениями приливной вариации силы тяжести составил 0,97, что свидетельствует о высокой достоверности полученных результатов.

В табл. 4 приведены параметры распределения разностей между измеренными и вычисленными по формулам (14)–(17) приливными вариациями силы тяжести.

Таблица 4. Параметры распределения разностей приливных вариаций силы тяжести

Статистические величины	Разности приливных вариаций силы тяжести, мГал
Мин.	–0,01165
Макс.	0,010284
Диапазон	0,021935
Среднее	0,000734
Стандартное отклонение	0,004047

Из данных, представленных в табл. 3, следует, что стандартное отклонение разностей между измеренными и вычисленными по формулам (14)–(17) значениями приливных вариаций силы тяжести составило 0,0040 мГал, а среднее отклонение – 0,0007 мГал. Таким образом, результаты гра-

виметрических наблюдений подтверждают корректность теоретических расчетов приливного воздействия небесных тел, выполненных по формулам (14)–(17), и, следовательно, подтверждают теоретические расчеты по формулам (10)–(13) составляющих потенциала приливного притяжения небесных тел W_B^n , приведенных в табл. 2–4.

Заключение

По результатам выполненного исследования сформулированы следующие выводы.

Разработан алгоритм гармонического разложения приливообразующего потенциала на поверхности Земли, обеспечивающий возможность вычисления составляющих приливного потенциала и их вертикальных производных для заданной точки и фиксированного момента времени.

Установлено, что составляющие лунного и солнечного приливного потенциала второй степени W_B^2 превосходят по величине составляющие потенциалов третьей W_B^3 , четвертой W_B^4 и пятой W_B^5 степеней в несколько раз.

Показано, что величины составляющих приливного потенциала, обусловленных воздействием планет, находятся в диапазоне от 10^{-6} до 10^{-11} м²/с². Наибольший вклад среди планетарных составляющих наблюдается у Юпитера и составляет $6,5 \times 10^{-6}$ м²/с².

Сопоставление фактических приливных вариаций силы тяжести, полученных по результатам наблюдений гравиметрами Scintrex CG-6 Autograv, с теоретическими значениями, вычисленными по формулам (14)–(17), продемонстрировало высокую степень согласованности экспериментальных и расчетных данных. Достоверность используемых моделей подтверждается высоким коэффициентом корреляции между теоретическими и измеренными значениями приливной вариации силы тяжести, равным 0,97, а также стандартным отклонением 0,004 мГал.

Полученные теоретические и численные результаты свидетельствуют о том, что основной вклад в гравитационный потенциал Земли вносят Луна и Солнце, тогда как влияние остальных планет Солнечной системы является существенно меньшим.

Благодарности

Исследование выполнено в рамках СЧ НИР «ГЕОТЕХ-КВАНТ» с целью создания высокоточных моделей гравитационного поля Земли и его характеристик.

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Молоденский М. С. Новые методы изучения фигуры Земли. Геодезия и картография. 1957. № 11. С. 5–10.
2. Михайлов В. О., Смирнов А. В. Исследование приливных вариаций силы тяжести по данным современных гравиметрических наблюдений. Геодезия и картография. 2021. № 5. С. 14–22.
3. Boy J.-P., Hinderer J. Study of the seasonal gravity signal in superconducting gravimeter data. Journal of Geodynamics. 2018. Vol. 80. P. 1–10.
4. Van Camp M., de Viron O. Environmental contributions to gravity time variations observed with superconducting gravimeters. Journal of Geophysical Research: Solid Earth. 2019. Vol. 124. P. 123–137.
5. Мельников А. А., Черников А. С. Учет приливных деформаций Земли при высокоточных геодезических измерениях. Вестник СГУГиТ. 2022. Т. 27, № 4. С. 45–56.
6. Resolutions as proposed by the International Association of Geodesy and endorsed by the International Union of Geodesy and Geophysics : Canberra, 2–14 December 1979. XVI General Assembly of the International Union of Geodesy and Geophysics. Canberra, 1979.
7. Petit G., Luzum B. IERS Conventions (2010). Frankfurt am Main : Verlag des Bundesamts für Kartographie und Geodäsie, 2010. 179 p.
8. Roosbeek F. RATGP95: a harmonic development of the tide-generating potential using an analytical method. Geophysical Journal International. 1996. Vol. 126. P. 197–204.
9. Hartmann T., Wenzel H.-G. Catalogue HW95 of the tide generating potential. Bulletin d'Informations Marées Terrestres. 1995. Vol. 123. P. 9278–9301.
10. Standish E. M., Williams J. G. Planetary and lunar ephemerides DE200-LE200 [Electronic resource]. Available at: <ftp://nav.jpl.nasa.gov/pub/ephem/export/> (accessed 28.02.2026).
11. Kudryavtsev S. M. Improved harmonic development of the Earth tide-generating potential. Journal of Geodesy. 2004. Vol. 77. P. 829–838.
12. Agnew D. C. Earth tides. Treatise on Geophysics. 2nd ed. Amsterdam : Elsevier, 2015. Vol. 3. P. 151–178.
13. Standish E. M. JPL planetary and lunar ephemerides DE405/LE405. Pasadena : Jet Propulsion Laboratory, 1998. JPL IOM 312.F-98-048.
14. Doodson A. T. The harmonic development of the tide-generating potential. Proceedings of the Royal Society of London. Series A. 1922. Vol. 100. P. 305–329.
15. Xi Q. A new complete development of the tide-generating potential for the epoch J2000.0. Bulletin d'Informations Marées Terrestres. 1987. Vol. 99. P. 1347–1369.

16. International Astronomical Union (IAU). Available at: <https://www.iausofa.org/> (accessed 29.02.2026).

REFERENCES

1. Molodenskiy, M. S. (1957). New methods for studying the figure of the Earth. *Geodeziya i kartografiya* [Geodesy and Cartography], 11, 5–10 [in Russian].
2. Mikhaylov, V. O., & Smirnov, A. V. (2021). Investigation of tidal gravity variations based on modern gravimetric observations. *Geodeziya i kartografiya* [Geodesy and Cartography], 5, 14–22 [in Russian].
3. Boy, J.-P., & Hinderer, J. (2018). Study of the seasonal gravity signal in superconducting gravimeter data. *Journal of Geodynamics*, 80, 1–10.
4. Van Camp, M., & de Viron, O. (2019). Environmental contributions to gravity time variations observed with superconducting gravimeters. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 124, 123–137.
5. Melnikov, A. A., & Chernikov, A. S. (2022). Accounting for tidal deformations of the Earth in high-precision geodetic measurements. *Vestnik SGUGiT* [Vestnik SSUGT], 27(4), 45–56 [in Russian].
6. Resolutions as proposed by the International Association of Geodesy and endorsed by the International Union of Geodesy and Geophysics: Canberra, 2–14 December 1979. (1979). In *XVI General Assembly of the International Union of Geodesy and Geophysics*. Canberra.
7. Petit, G., & Luzum, B. (2010). *IERS Conventions (2010)*. Frankfurt am Main: Verlag des Bundesamts für Kartographie und Geodäsie, 179 p.
8. Roosbeek, F. (1996). RATGP95: A harmonic development of the tide-generating potential using an analytical method. *Geophysical Journal International*, 126, 197–204.
9. Hartmann, T., & Wenzel, H.-G. (1995). Catalogue HW95 of the tide generating potential. *Bulletin d'Informations Marées Terrestres*, 123, 9278–9301.
10. Standish, E. M., & Williams, J. G. Planetary and lunar ephemerides DE200-LE200. Available at: <ftp://nav.jpl.nasa.gov/pub/ephem/export/> (accessed February 28, 2026).
11. Kudryavtsev, S. M. (2004). Improved harmonic development of the Earth tide-generating potential. *Journal of Geodesy*, 77, 829–838.
12. Agnew, D. C. (2015). Earth tides. In *Treatise on Geophysics* (2nd ed., Vol. 3, pp. 151–178). Amsterdam: Elsevier.
13. Standish, E. M. (1998). *JPL planetary and lunar ephemerides DE405/LE405*. Pasadena: Jet Propulsion Laboratory. JPL IOM 312.F-98-048.
14. Doodson, A. T. (1922). The harmonic development of the tide-generating potential. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A*, 100, 305–329.
15. Xi, Q. (1987). A new complete development of the tide-generating potential for the epoch J2000.0. *Bulletin d'Informations Marées Terrestres*, 99, 1347–1369.
16. International Astronomical Union (IAU). Available at: International Astronomical Union (IAU) (accessed February 29, 2026).

Об авторах

Вадим Федорович Канушин – кандидат технических наук, доцент кафедры космической и физической геодезии.

Денис Николаевич Голдобин – кандидат технических наук, доцент кафедры космической и физической геодезии.

Наталья Николаевна Кобелева – кандидат технических наук, доцент кафедры космической и физической геодезии.

Author details

Vadim F. Kanushin – PhD, Associate Professor, Department of Space and Physical Geodesy.

Denis N. Goldobin – PhD, Associate Professor, Department of Space and Physical Geodesy.

Natalia N. Kobeleva – PhD, Associate Professor, Department of Space and Physical Geodesy.

Получено / Received 10.06.2026

Поступила после рецензирования / Revised 17.08.2026

Принята к публикации / Accepted 21.09.2026