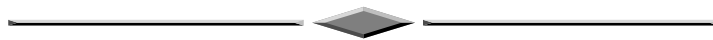


# ДИСТАНЦИОННОЕ ЗОНДИРОВАНИЕ ЗЕМЛИ, ФОТОГРАММЕТРИЯ



Научно-исследовательская статья/Applied research article

УДК 622.1:528.711.11.089.6:623.746-519

<https://doi.org/10.33764/2411-1759-2026-31-3-37-48>

## Влияние ошибок параметров калибровки камеры на точность вычисления объемов горной массы при съемке, выполненной беспилотными авиационными системами

С. Г. Могильный<sup>1</sup>, А. А. Шоломицкий<sup>2✉</sup>, М. С. Тутанова<sup>3</sup>, Н. Н. Леонов<sup>4</sup>

<sup>1</sup>Донецкий национальный технический университет, г. Донецк, Российская Федерация

<sup>2</sup>Сибирский государственный университет геосистем и технологий, г. Новосибирск, Российская Федерация

<sup>3</sup>Карагандинский технический университет имени Абылкаса Сагинова, г. Караганда, Республика Казахстан

<sup>4</sup>ТОО «АзияГеоСтрой», г. Караганда, Республика Казахстан

e-mail: sholomitskij@mail.ru

**Аннотация.** Аэрофотосъемка с беспилотных авиационных систем широко используется в геодезии и маркшейдерии для съемок открытых горных разработок. Автоматическая обработка результатов аэрофотосъемки позволяет быстро получить цифровые модели поверхности карьеров для решения различных задач, в том числе определения объемов. В результате различных вариантов обработки аэрофотосъемки и расчета вынудой горной массы выявлено значительное расхождение объемов, полученных при обработке аэрофотосъемки с самокалибровкой и без самокалибровки съемочной камеры. Приведена методика определения средних квадратических ошибок координат каждой точки модели и выполнена оценка точности определения объемов в двух вариантах. В первом предполагалось, что подобные ошибки положения точек модели являются случайными независимыми величинами, и потому их влияние на точность вычисления объемов горной массы ничтожно мало. Во втором варианте расчета принята возможность наличия ошибок самокалибровки камеры, что привело к корреляции средних квадратических ошибок координат точек модели и иному результату расчетов. Этот вариант показал ошибку определения объемов около 0,4 %, что меньше установленных допусков. Для уменьшения влияния систематических ошибок результатов аэрофотосъемки рекомендуется использовать параметры калибровки съемочной камеры, которые получены из лабораторных исследований на калибровочных стендах.

**Ключевые слова:** беспилотная авиационная система, аэрофотосъемка, цифровой снимок, фототриангуляция, машинное зрение, точность, карьер, объем вынудой горной массы

### Для цитирования:

Могильный С. Г., Шоломицкий А. А., Тутанова М. С., Леонов Н. Н. Влияние ошибок параметров калибровки камеры на точность вычисления объемов горной массы при съемке, выполненной беспилотными авиационными системами. *Вестник СГУГиТ*. 2026. Т. 31, № 3. С. 37–48. <https://doi.org/10.33764/2411-1759-2026-31-3-37-48>

## Impact of camera calibration parameter errors on the accuracy of rock mass volume estimation using unmanned aerial systems

S. G. Mogilny<sup>1</sup>, A. A. Sholomitskii<sup>2✉</sup>, M. S. Tutanova<sup>3</sup>, N. N. Leonov<sup>4</sup>

<sup>1</sup>Donetsk National Technical University, Donetsk, Russian Federation

<sup>2</sup>Siberian State University of Geosystems and Technologies, Novosibirsk, Russian Federation

<sup>3</sup>Karaganda Technical University named after Abylka Saginov, Karaganda, Republic of Kazakhstan

<sup>4</sup>LLP «AsiaGeoStroy», Karaganda, Republic of Kazakhstan

e-mail: sholomitskij@mail.ru

**Abstract.** Aerial photography from unmanned aerial systems is widely used in geodesy and mining surveying for surveys of open-pit mines. Automatic processing of aerial imagery enables rapid generation of digital surface models of quarries for various tasks, including volume computation. Analysis of different processing approaches for aerial photography and calculation of excavated rock mass revealed significant discrepancies between volumes obtained with and without self-calibration of the imaging camera. A methodology for estimating the root-mean-square errors (RMSE) of coordinates of each point of the model is presented, and the accuracy of volume determination is evaluated in two scenarios. In the first scenario, the point position errors are assumed to be random and independent, implying that their influence on rock mass volume computation accuracy is negligible. In the second scenario, camera self-calibration errors are considered, which induces correlation among the RMSEs of the point coordinates and yields a different result. This scenario indicates a volume determination error of approximately 0.4%, which is within established tolerances. To reduce the influence of systematic errors in aerial photography results, it is recommended to use camera calibration parameters obtained from laboratory investigations on calibration rigs.

**Keywords:** unmanned aircraft system, aerial photography, digital image, phototriangulation, machine vision, accuracy, open-pit mine, volume of excavated rock mass

### For citation:

Mogilny S. G., Sholomitskii A. A., Tutanova M. S., Leonov N. N. (2026). Impact of camera calibration parameter errors on the accuracy of rock mass volume estimation using unmanned aerial systems. *Vestnik SSUGiT [Vestnik SSUGT]* Vol. 31, No. 3. pp. 37–48. <https://doi.org/10.33764/2411-1759-2026-31-3-37-48>

### Введение

Беспилотные авиационные системы (БАС) широко применяются в геодезической [1–5] и маркшейдерской практике для решения различных задач [6–10]. Появление широкого спектра БАС, оснащенных бюджетными камерами с простой оптикой и небольшими матрицами, привели к изменению подхода к выполнению аэрофотосъемки и ее обработки. Аэрофотосъемка стала гораздо дешевле по сравнению с пилотируемой аэрофотосъемкой, а обработка значительно упростилась из-за применения автоматических методов обработки с использованием машинного зрения. Современные программы, например, Agisoft

MetaShape [11] и Pix4D [12], позволяют обрабатывать тысячи снимков в автоматическом режиме и получать приемлемые по точности результаты для многих прикладных задач.

Широкое использование аэрофотосъемки БАС привело к тому, что пользователи этих программ не являются специалистами в области фотограмметрии. Поэтому программы для автоматической обработки имеют довольно упрощенный интерфейс, рассчитанный на минимальное знание фотограмметрии [11, 12].

В общем случае качество съемки и ее обработки можно оценить только по остаточным отклонениям на опорных и контрольных точках, которые являются объективными по-

казателями точности сети, но количество их небольшое, и они расположены локально по полю съемки. Все остальное поле съемки не имеет надежных характеристик точности. Следует отметить, что опорные и контрольные точки опознаются опытным наблюдателем вручную, что значительно повышает точность их опознавания и измерения.

Очень часто для используемых на БАС бюджетных камер нет параметров лабораторной калибровки, и пользователи включают при обработке режим самокалибровки. Чаще всего, в том числе и в программах [11, 12], используют модель ошибок Брауна [13, 14], которая описывает ошибки объектива и сенсора камеры. Определить параметры калибровки можно в лабораторных условиях на специальных калибровочных стендах [15] или при уравнивании фототриангуляции. Этот метод называется самокалибровкой камеры [16–19].

Пользователи программ автоматической обработки аэросъемки почти всегда используют режим самокалибровки при обработке аэросъемки БАС, и объясняется это тем, что остаточные ошибки на опорных и контрольных точках уменьшаются в разы по сравнению с режимом без самокалибровки.

Некоторые авторы утверждают, что калибровку камеры можно выполнять по аэрофотосъемке специальных территорий с замаркированными опорными точками [18], координаты которых определены с высокой точностью геодезическими методами. Для эффективной самокалибровки по съемке реальных объектов должны соблюдаться определенные условия. Так, например, при съемке равнинной местности нельзя выполнить калибровку и определить все необходимые элементы модели ошибок камеры [15, 17, 19]. Есть исследования, которые показывают, что ошибочная (некорректно выполненная) самокалибровка может привести к систематическим ошибкам определения высот точек модели (Правила осуществления маркшейдерской деятельности : утв. приказом Федеральной службы по экологическому, технологическому и атомному надзору от 19 мая 2023 г. № 186. – URL: <http://www.consultant.ru>. – Текст : электронный), что в свою очередь приведет к ошибкам определения объема горной массы.

В геодезической и маркшейдерской практике одной из важнейших задач является учет объемов горных работ, поэтому важной и актуальной задачей является оценка влияния случайных и систематических ошибок аэрофотосъемки БАС на точность вычисления объемов.

### Материалы и методы исследования

В качестве объекта исследования, на котором выполнялись эксперименты по аэросъемке БАС и подсчету объемов, был выбран небольшой угольный разрез (рис. 1) площадью около 70 га с числом снимков 1 075–1 270 снимков в съемках на разные даты. Перепад высот в пределах разреза не превышает 50 м, высота полета 120 м.

Съемка велась параллельными маршрутами, с продольным и поперечным перекрытием около 80 %. Положение центров фотографирования определялось по ГНСС-измерениям в режиме постобработки с точностью 15–20 мм.

Для исследований использовалась аэрофотосъемка карьера камерой FC6310 (8,80 мм). Сеть фототриангуляции имела 14 опорных планово-высотных пунктов. На рис. 1 показана поверхность разреза и горного отвода на 03.06.2023.

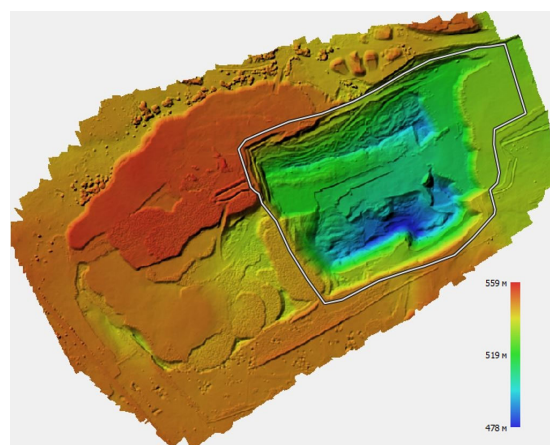


Рис. 1. Съемка на 03.06.2023

На рис. 1 белый контур показывает место, где производилась выемка, на остальной территории производилась насыпка вскрыши.

По съемкам 03.06.2023 и 28.07.2023 были подсчитаны объемы выемки и насыпи при об-

работке аэрофотосъемки без самокалибровки и остальных одинаковых параметрах обработки с самокалибровкой съемочной камеры при (таблица).

Расчет объемов между поверхностями (03.06–28.07.2023)

Вариант вычислений	Выемка, м <sup>3</sup>	Насыпь, м <sup>3</sup>	Разность, % м <sup>3</sup> (выемка)	Разность, % м <sup>3</sup> (насыпь)
Без самокалибровки	435 799	404 046	7,7	-5,1
С самокалибровкой	403 297	425 034	32 502	-20 988

Как видно из таблицы, самокалибровка в значительной степени влияет на вычисленный объем горной массы, это влияние значительно превышает допуски (Правила осуществления маркшейдерской деятельности : утв. приказом Федеральной службы по экологическому, технологическому и атомному надзору от 19 мая 2023 г. № 186. – URL: <http://www.consultant.ru>. – Текст : электронный). При этом нельзя сказать, что вариант с самокалибровкой более точный. Так, в исследованиях и компьютерном моделировании авторов [20] показано, что при неправильном определении параметров калибровки камер могут проявляться систематические куполообразные искажения снимаемой поверхности с ошибкой до 0,2 м при высоте съемки 100 м. Дальнейшие исследования авторов посвящены оценке влияния случайных ошибок результатов аэрофотосъемки БАС на точность вычисления объемов.

### **Методика анализа данных аэрофотосъемки БАС**

Материалы обработки данных аэрофотосъемки БАС в Agisoft MetaShape [11] не дают полной информации о точности координат пикетов из уравнивания сети фототриангуляции, поэтому авторы использовали программу уравнивания фототриангуляции BlockMSG, которую создал профессор С. Г. Могильный и которая имеет полный доступ к алгоритмам и параметрам уравнивания фототриангуляции.

Методика обработки и анализа данных аэрофотосъемки БАС включает следующие этапы:

– аэрофотоснимки и опорные данные загружаются в Agisoft MetaShape, в котором методами компьютерного зрения находятся идентичные точки на снимках и определяются их координаты в системе координат снимков;

– из Agisoft MetaShape экспортируются имена и координаты точек на снимках;

– математическая основа обоих комплексов одинакова, поэтому все дальнейшие вычисления выполнялись в BlockMSG.

В BlockMSG в протоколе вычислений содержатся средние квадратические величины случайных ошибок определения координат каждой точки фототриангуляции, которые будут использоваться в дальнейшем анализе.

### **Анализ влияния случайных ошибок координат точек объекта на точность вычисления объемов**

Точность определения вынутых объемов горной массы в карьере зависит главным образом от точности определения координат пикетных точек на поверхности горных выработок и от метода вычисления объемов.

В популярных программных комплексах, например, Agisoft Metashape Professional, используется метод призм, который за счет густой сетки пикетов может обеспечить высокую точность аппроксимации поверхности тела выемки.

В научной литературе имеется достаточно исследований по оценке ошибок определения объемов горной массы в карьере. Исследования были актуальными, поскольку в нормативных документах (например, Правила осуществления маркшейдерской деятельности : утв. приказом Федеральной службы по эко-

гическому, технологическому и атомному надзору от 19 мая 2023 г. № 186. – URL: <http://www.consultant.ru>. – Текст : электронный), регламентирующих выполнение маркшейдерских работ, были установлены обязательные допуски ошибок определения объемов. Эта тема актуальна и теперь в связи с появлением новых технологий съемок [8, 10].

Высокая степень автоматизации обработки фотосъемки с БАС позволяет параллельно с построением плана горных работ в карьере выполнить оценку ожидаемых ошибок определения вынутых объемов.

В современных программах объем вычисляется методом призм, которые образуются между смежными пикетами на топографической поверхности уступов.

Форма оснований призм зависит от расположения пикетов. Координаты точек фототриангуляции являются первичной информацией, для которых можно получить статистические характеристики их средних квадратических ошибок, зависящие от случайных ошибок измерения фотоснимков. Геодезические координаты пикетов являются производной, т. е. вторичной информацией, но в ПО BlockMSG средние квадратические ошибки координат пикетов вычисляются и выводятся в документации вычислений.

Точки фототриангуляции расположены нерегулярно, поэтому для разбиения на призмы используется разбиение поверхности на треугольники методом триангуляции Делоне.

При использовании треугольников объемы смежных призм будут коррелированными, так как используются общие пикеты, что осложняет вычисление дисперсии суммы объемов призм.

При использовании полигонов Тиссена объем каждой призмы зависит только от ошибок координат одного пикета.

Пусть для некоторой призмы использованы координаты пикета  $I$ , которые отягощены вектором ошибок  $\bar{\Delta}_i$  (рис. 2). На нем сплошными линиями показана триангуляционная поверхность, а штриховыми – границы полигонов. Поскольку полигоны имеют малые размеры из-за высокой плотности пикетов в фототриангуляции, можно принимать

поверхность в пределах полигона плоскостью.

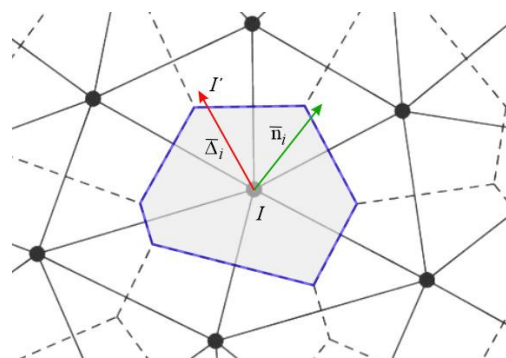


Рис. 2. Разбиение поверхности для вычисления объема горной массы в карьере

Тогда при вычислении объема призмы вместо координат точки  $I$  будут использованы координаты точки  $I'$ , что внесет в объем призмы ошибку  $\delta V$ , которая вычисляется по формуле

$$\delta V_i = S_i \cdot (\bar{n}_i \cdot \bar{\Delta}_i), \quad (1)$$

где  $S_i$  – площадь полигона;  $\bar{n}_i$  – вектор нормали к поверхности полигона (см. рис. 2);  $(\bar{n}_i \cdot \bar{\Delta}_i)$  – скалярное произведение векторов.

Ошибка  $\Delta V$  общего объема по карьере получается суммированием

$$\Delta V = \sum_1^N S_i \cdot (\bar{n}_i \cdot \bar{\Delta}_i), \quad (2)$$

где  $N$  – общее число пикетов по карьере.

Если векторы выразить их проекциями на оси системы координат, то формула (2) примет вид

$$\Delta V = \sum_1^N S_i \cdot (n_{x_i} \delta_{x_i} + n_{y_i} \delta_{y_i} + n_{z_i} \delta_{z_i}) \quad (3)$$

или

$$\Delta V = \sum_1^N S_i \cdot \delta_{n_i}, \quad (4)$$

где  $n_{x_i}, n_{y_i}, n_{z_i}$  – проекции единичного вектора нормали к полигона;

$\delta_{x_i}, \delta_{y_i}, \delta_{z_i}$  – случайные ошибки координат центра  $i$ -го полигона;

$\delta_{n_i}$  – случайная ошибка центра полигона по направлению нормали;

$N$  – число полигонов.

Если предположить, что ошибки координат пикетов  $\delta_{n_i}$  являются независимыми случайными величинами, то средняя квадратическая ошибка  $M_V$  определения объема по карьеру будет вычисляться по формуле

$$M_V = \sqrt{\sum_1^N S_i^2 \cdot \sigma_{n_i}^2}. \quad (5)$$

Дисперсия  $\sigma_{\delta_{n_i}}^2$  случайной ошибки пикета  $\delta_{n_i}$  в соответствии с формулой (3) определяется из выражения

$$\sigma_{\delta_{n_i}}^2 = n_{x_i}^2 \sigma_{x_i}^2 + n_{y_i}^2 \sigma_{y_i}^2 + n_{z_i}^2 \sigma_{z_i}^2.$$

Анализ показывает, что предположение о независимости ошибок  $\delta_{n_i}$  приводит к парадоксу, так как из формулы (5) следует, что при увеличении плотности пикетов, когда

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_i = 0, \quad (6)$$

то и

$$\sigma_{\Delta V_g}^2 = (S_1 \cdot \sigma_{\delta_1} + S_2 \cdot \sigma_{\delta_2} + \dots + S_{N_g} \cdot \sigma_{\delta_{N_g}})^2, \quad (8)$$

где  $N_g$  – количество полигонов в окрестности  $\Pi_g$ .

Принимая, что ошибки координат пикетов разных окрестностей не коррелированы, получим  $M_V$  – случайную среднюю квадратическую ошибку определения объема по карьеру, по формуле:

$$M_V = \sqrt{\sum_{n=1}^{N_{\Pi}} \sigma_{\Delta V_n}^2}, \quad (9)$$

где  $N_{\Pi}$  – общее число построенных окрестностей.

Размер окрестности можно будет выбрать и обосновать при практических испытаниях и исследованиях на экспериментальных съемках карьеров.

Предлагаемый алгоритм оценки точности объемов позволяет оценивать по результатам уравнивания фототриангуляции с беспилотных авиационных систем качество залета и результатов обработки съемки для маркшейдерского обеспечения горных работ.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} M_V = 0. \quad (7)$$

Формула (7) не соответствует действительности, поскольку при ее выводе не учитывалась статистическая зависимость между ошибками координат при пространственной близости пикетов.

Мерой статистической зависимости служит  $r(\rho_{j,k})$  – коэффициент корреляции между величинами ошибок координат  $\delta_{n_j}$  и  $\delta_{n_k}$  пикетов, между которыми расстояние  $\rho_{j,k}$ . Чем меньше  $\rho_{j,k}$ , тем ближе  $r(\rho_{j,k})$  к единице.

Обозначим через  $\rho_0$  наибольшее расстояние между пикетами, при котором  $r(\rho_0)$  практически равно +1. Тогда для окрестности  $\Pi_g$  дисперсия  $\sigma_{\Delta V_g}^2$  ошибки вычисления объемов призм, расположенных в этой окрестности, будет оцениваться формулой

В качестве окрестностей  $\Pi_g$  логично использовать области вокруг положения проекций центров фотоснимков на поверхности карьера, например, полигоны Тиссена. Ошибки объемов треугольных призм в пределах полигона Тиссена заведомо тесно коррелированы. Формула (8) соответствует предельному случаю коррелированности ошибок в окрестности  $\Pi_g$ .

Обобщим полученную формулу (8) на случай множества треугольных призм в пределах полигона Тиссена, в котором все ошибки центров треугольников тесно коррелированы.

Истинная ошибка  $\Delta V_k$  объема треугольной призмы  $k$  определяется по формуле

$$\Delta V_k = S_k \delta_k, \quad (10)$$

а дисперсия – по формуле

$$\sigma_{V_k}^2 = S_k^2 \sigma_k^2, \quad (11)$$

где  $\sigma_k$  – СКО координат по нормали к плоскости треугольной грани.

Без учета корреляции, т. е. когда все  $r_{ik} = 0$ , дисперсия  $M_j^2$  объемов всех треугольников в пределах полигона  $j$  будет равна

$$M_j^2 = \sum_1^{N_j} \sigma_k^2. \quad (12)$$

С учетом корреляции дисперсия объема полигона  $j$  должна вычисляться по формуле

$$K_j = \begin{vmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_1\sigma_2r_{12} & \sigma_1\sigma_3r_{13} & \cdots & \sigma_1\sigma_{N_j}r_{1N_j} \\ \sigma_1\sigma_2r_{12} & \sigma_2^2 & & & \\ \sigma_1\sigma_3r_{13} & & \sigma_3^2 & & \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ \sigma_1\sigma_{N_j}r_{1N_j} & & & \cdots & \sigma_{N_j}^2 \end{vmatrix}. \quad (14)$$

$N_j$  – число треугольников в полигоне.

Формула (13) является достаточно строгой и обоснованной, но для ее применения необходимо знать значения коэффициентов корреляции  $r_{ik}$  в формуле (14); кроме того, при большом числе треугольников их нахождение трудно реализовать даже на современных ЭВМ.

Поэтому имеет смысл ее упростить, используя средние значения величин, используемых в ней параметров, а именно:

– вместо отдельных значений  $\sigma_k$  подставим в формулу (14) их среднее значение  $\bar{\sigma}_j$  в полигоне

$$\bar{\sigma}_j = \frac{1}{N_j} \sum_1^{N_j} \sigma_k, \quad (15)$$

$$M_j^2 = \bar{\sigma}_j^2 \cdot \bar{S}_j^2 \begin{vmatrix} 1 & r_{12} & r_{13} & \cdots & r_{1N_j} \\ r_{12} & 1 & & & \\ r_{13} & & 1 & & \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ r_{1N_j} & & & \cdots & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ \vdots \\ S_{N_j} \end{vmatrix} \quad (18)$$

или

$$M_j^2 = \begin{vmatrix} S_1 & S_2 & S_3 & \cdots & S_{N_j} \end{vmatrix} \cdot K_j \cdot \begin{vmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ \vdots \\ S_{N_j} \end{vmatrix}, \quad (13)$$

где  $K_j$  – ковариационная матрица ошибок объемов треугольников, которая имеет следующий вид:

и матрица в формуле (14) примет вид

$$K_j = \bar{\sigma}_j^2 \begin{vmatrix} 1 & r_{12} & r_{13} & \cdots & r_{1N_j} \\ r_{12} & 1 & & & \\ r_{13} & & 1 & & \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ r_{1N_j} & & & \cdots & 1 \end{vmatrix}; \quad (16)$$

– вместо отдельных значений  $S_k$  в формуле (13) используем их среднее значение в полигоне

$$S_j = \frac{1}{N_j} \sum_1^{N_j} S_k. \quad (17)$$

Предлагаемые упрощения приводят формулу (13) к следующему виду:

$$M_j^2 = \bar{\sigma}_j^2 \cdot \bar{S}_j^2 N_j \Psi(N_j, r_{12}, r_{13}, \dots, r_{N_j-1, N_j}), \quad (19)$$

где  $\Psi(N_j, r_{12}, r_{13}, \dots, r_{N_j-1, N_j})$  – функция, учитывающая корреляцию ошибок объемов призм треугольников  $j$ -го полигона и устраняющая парадокс формулы (7).

### Свойства функции $\Psi$

В соответствии с формулой (19) функция  $\Psi$  имеет вид

$$\Psi(N_j, r_{12}, r_{13}, \dots, r_{N_j-1, N_j}) = \frac{1}{\sqrt{N_j}} \begin{vmatrix} 1 & r_{12} & r_{13} & \dots & r_{1N_j} \\ r_{12} & 1 & & & \\ r_{13} & & 1 & & \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ r_{1N_j} & & & \dots & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{vmatrix}. \quad (20)$$

Некоторые очевидные значения:

- а)  $\Psi(N_j) = 1$  при  $\forall r_{ik} = 0$ ;
- б)  $\Psi(N_j) = \sqrt{N_j}$  при  $\forall r_{ik} = 1$ .

Если все  $r_{ik}$  равны константе  $r \in (0, 1)$ , то функция  $\Psi$  имеет вид

$$\Psi(t, r) = \sqrt{1 + r(t-1)}, \quad (21)$$

где  $t$  – число треугольников в полигоне.

Характер ее поведения показан на рис. 3.

Ошибка объемов по карьере выражается формулой

$$M_V = \sqrt{\sum_{j=1}^{N_{\text{сн}}} \sigma_j^2 \cdot S_j^2 N_j \cdot \Psi(N_j, r)}, \quad (22)$$

где  $N_{\text{сн}}$  – число снимков;  $r$  – средний коэффициент корреляции объемов треугольных призм.

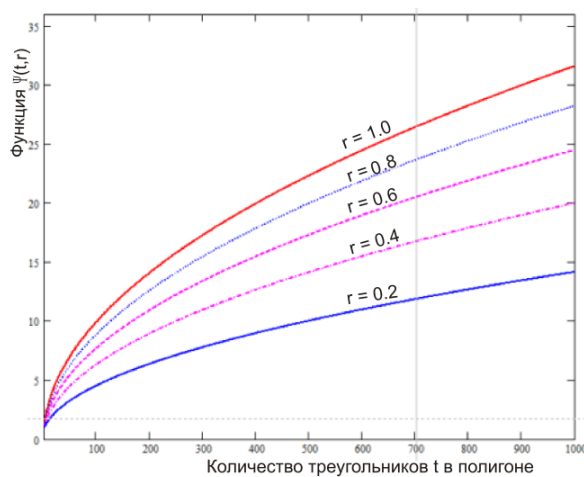


Рис. 3. Функция  $\Psi$

### Обсуждение

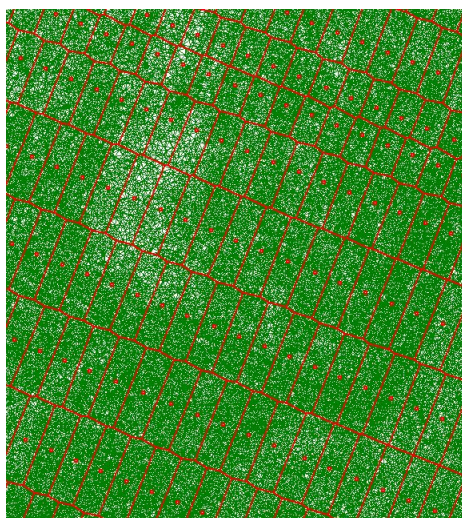
Для расчетов по приведенной теории была создана программа [21], которая позволяет построить триангуляцию Делоне и выполнить расчет ошибок определения объема при усло-

вии, что ошибки координат точек модели являются случайными независимыми величинами.

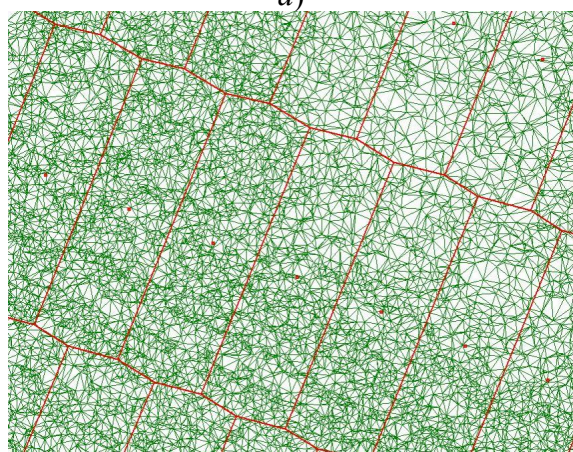
Если выполнить расчеты по формулам (1)–(9) для триангуляционной поверхности, получим для исследуемого объекта следующие данные: точек модели 1 126 632; тре-

угольников 2 252 974; общая площадь 1 317 928 м<sup>2</sup>; ошибка объема 313,8 м<sup>3</sup>. Ошибка определения объемов по двум поверхностям составит 449,7 м<sup>3</sup> или относительно среднего объема выемки и насыпки (см. таблицу) 0,05 %.

Если калибровка камеры выполнена некорректно, то влияние ошибок калибровки камеры будет распространяться на некоторую область влияния этого снимка и тогда можно будет использовать формулу (22) для определения ошибки вычисления объема. Чтобы определить зону влияния снимка на точки поверхности, воспользуемся полигонами Тиссена, построенными по проекциям центров фотографирования (рис. 4).



а)



б)

**Рис. 4.** Полигоны Тиссена по центрам фотографирования:

а) фрагмент карьера; б) в более крупном масштабе

На рис. 4 показана триангуляция Делоне (зеленым цветом) и полигоны Тиссена (красным цветом показаны границы и центр фотографирования), построенные по центрам фотографирования, которые оказывают влияние на определение координат точек модели.

По расчетам, которые учитывают корреляцию с коэффициентом  $r = 0,6$ , для треугольников, попавших в область влияния снимка, ошибка определения объема для поверхности составляет 2434,4 м<sup>3</sup>, а с учетом равноточных измерений точек обеих поверхностей подсчета объема вынудой горной массы ошибка определения объема между двумя поверхностями составит 3456 м<sup>3</sup>, или 0,41 % от общей горной массы выемки и насыпки (см. таблицу).

Следует иметь в виду, что предложенные формулы оценки ошибки объемов характеризуют влияние только случайных ошибок координат точек и не учитывают существенных систематических ошибок, на наличие которых указывают данные таблицы.

### Заключение

На основании выполненного анализа можно утверждать следующее: ошибка определения объемов вынудой горной массы для угольного разреза в предположении, что ошибки координат являются независимыми величинами, ничтожно мала по сравнению с объемами (см. таблицу) и составляет 0,05 %. Если учитывать корреляцию смежных точек, ошибки калибровки камеры и ее влияние на снимки, то ошибка определения объема составит 0,41 %, что на порядок меньше, чем ошибки в таблице.

Некоторые исследователи полагают, что самокалибровку камер нельзя использовать при съемке равнинных объектов с незначительным перепадом высот относительно высоты фотографирования [15, 17, 19]: это может привести к ошибочному определению параметров калибровки. Другие полагают, что для надежного определения параметров самокалибровки необходимо делать маршруты с наклоном камеры [20], что имитирует конвергентную съемку плоского тестового полигона. Однако этот подход требует дополни-

тельных маршрутов и увеличивает время получения результата, что довольно критично в условиях горного производства. Авторы считают, что для выполнения аэросъемки БАС объектов необходимо использовать камеру с определенными в лабораторных условиях на специальных тестовых объектах параметрами калибровки. Такой подход обеспечивает надежное определение объемов с выполнением допусков (Правила осуществления маркшейдерской деятельности : утв. прика-

зом Федеральной службы по экологическому, технологическому и атомному надзору от 19 мая 2023 г. № 186. – URL: <http://www.consultant.ru>. – Текст : электронный).

Следует отметить, что на практике самокалибровку камер зачастую используют для уменьшения остаточных отклонений на опорных точках таким образом, как бы повышая точность выполненной съемки. Этот вопрос требует дальнейших исследований.

## СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Алимов В. А., Григорьев А. Н. Геодезические работы с применением беспилотных летательных аппаратов. М. : АСВ, 2021. 208 с.
2. Захаров А. И., Коптев Е. В. Беспилотные технологии в геодезии и картографии. СПб. : Политехника, 2020. 192 с.
3. Nex F., Remondino F. UAV for 3D mapping applications: a review. *Applied Geomatics*. 2014. Т. 6, № 1. С. 1–15. DOI 10.1007/s12518-013-0120-x.
4. Тимофеев А. Н., Смирнов Л. Е. Оценка точности БПЛА-съемки с RTK для кадастровых работ. *Геодезия и картография*. 2022. № 5. С. 12–20.
5. Андреев А. В., Кузнецов П. С. Мониторинг оползневых склонов с использованием БПЛА и фотограмметрии. *Инженерная геодезия*. 2023. № 3. С. 45–53.
6. Куликов В. И., Галкин В. И. Маркшейдерско-геодезические работы с применением БПЛА. М. : Горная книга, 2022. 164 с.
7. Певзнер М. Е., Смирнов С. Г. Цифровые технологии в маркшейдерии. СПб. : Лань, 2021. 312 с.
8. Тимофеев А. Н. и др. Оценка точности БПЛА с RTK для мониторинга угольных разрезов. *Горный информационно-аналитический бюллетень*. 2023. № 5. С. 45–53.
9. Virtanen J. P. и др. UAV Photogrammetry for Monitoring Mine Sites // *Remote Sensing*. 2020. Т. 12, № 17. 2696. DOI 10.3390/rs12172696.
10. Кузнецов П. С. Автоматизация подсчета объемов вскрыши с помощью Pix4D. *Маркшейдерский вестник*. 2022. № 4. С. 22–30.
11. Agisoft Metashape User Manual. Standard Edition. Version 1.8 [Электронный ресурс]. URL: [https://www.agisoft.com/pdf/metashape\\_1\\_8\\_en.pdf](https://www.agisoft.com/pdf/metashape_1_8_en.pdf) (дата обращения: 11.08.2025).
12. Pix4D Documentation [Электронный ресурс]. URL: <https://support.pix4d.com/hc/en-us/articles/360023629191> (дата обращения: 11.08.2025).
13. Brown D. C. Decentering Distortion of Lenses. *Photogrammetric Engineering*. 1966. Т. 32, № 3. С. 444–462.
14. Luhmann Т. и др. *Close-Range Photogrammetry and 3D Imaging*. 3rd ed. Berlin: De Gruyter, 2014. 684 p.
15. Могильный С. Г., Лунев А. А., Шоломицкий А. А. Конструктивная калибровка цифровой камеры. *Известия вузов. Геодезия и аэрофотосъемка*. 2011. № 2. С. 62–66.
16. Faugeras O., Luong Q.-T., Maybank S. Camera self-calibration: Theory and experiments. *European Conference on Computer Vision ECCV'92*. LNCS 588. 1992. С. 321–334.
17. Mogilny S. G., Sholomitsky A. A., Martynov O. V. The effectiveness of self-calibration of non-metric digital camera that used on unmanned aerial vehicles. *SGEM2018 Conference Proceedings*. 29 June – 5 July 2018. Vol. 18, Issue 2.3. С. 199–209. DOI 10.5593/sgem2018/2.3/S10.026.

18. Кадничевский С. А., Курков М. В., Курков В. М., Чибуничев А. Г. Фотограмметрическая калибровка фотокамеры для аэрофотосъемки с беспилотного воздушного судна. *Геопрофи.* 2019. № 6. С. 35–40.
19. Chibunichev G., Kurkov V. M., Smirnov A. V., Govorov A. V., Mikhailin V. A. Investigation of phototriangulation accuracy with using of various techniques laboratory and field calibration. *The International Archives of the Photogrammetry, Remote Sensing and Spatial Information Sciences.* 2016. Vol. XLI-B1. XXIII ISPRS Congress, 12–19 July 2016, Prague, Czech Republic.
20. James M. R., Robson S. Mitigating systematic error in topographic models derived from UAV and ground-based image networks. *Earth Surface Processes and Landforms.* 2014. Vol. 39. P. 1413–1420. DOI 10.1002/esp.3609.
21. Шоломицкий А. А., Тутанова М. С. Measurement converter: свидетельство о гос. регистрации программы для ЭВМ № 2022668209 от 04.10.2022. Заявка № 2022667849 от 04.10.2022. Бюл. № 10 от 04.10.2022.

## REFERENCES

1. Alimov, V. A., Grigoriev, A. N. (2021). *Geodezicheskiye raboty s primeneniym bespilotnykh letatel'nykh apparatov [Geodetic works using unmanned aerial vehicles]*. Moscow: ASV Publishing, 208 p.
2. Zakharov, A. I., Koptev, E. V. (2020). *Bespilotnyye tekhnologii v geodezii i kar-tografii [Unmanned technologies in geodesy and cartography]*. Saint Petersburg: Polytechnic, 192 p.
3. Nex, F., Remondino, F. (2014). UAV for 3D mapping applications: A review. *Applied Geomatics*, 6(1), 1–15. DOI 10.1007/s12518-013-0120-x.
4. Timofeev, A. N., Smirnov, L. E. (2022). Accuracy assessment of UAV surveying with RTK for cadastral works. *Geodeziya i kartografiya [Geodesy and Cartography]*, No. 5, 12–20.
5. Andreev, A. V., Kuznetsov, P. S. (2023). Landslide monitoring using UAVs and photogrammetry. *Inzhenernaya geodeziya [Engineering Geodesy]*, No. 3, 45–53.
6. Kulikov, V. I., Galkin, V. I. (2022). *Marksheydersko-geodezicheskiye raboty s primeneniym BPLA. [Mine surveying and geodetic works using UAVs]*. Moscow: Mining Book, 164 p.
7. Pevzner, M. E., Smirnov, S. G. (2021). *Tsifrovyye tekhnologii v marksheyderii. [Digital technologies in mine surveying]*. Saint Petersburg: Lan', 312 p.
8. Timofeev, A. N. et al. (2023). Accuracy assessment of RTK-equipped UAVs for monitoring coal mines. *Gornyy informatsionno-analiticheskiy byulleten' [Mining Information and Analytical Bulletin]*, No. 5, 45–53.
9. Virtanen, J. P. et al. (2020). UAV photogrammetry for monitoring mine sites. *Remote Sensing*, 12(17), 2696. DOI 10.3390/rs12172696.
10. Kuznetsov, P. S. (2022). Automation of overburden volume calculation using Pix4D. *Marksheyderskiy vestnik. [Mine Surveying Bulletin]*, No. 4, 22–30.
11. Agisoft Metashape User Manual. Standard Edition. Version 1.8 Retrieved from [https://www.agisoft.com/pdf/metashape\\_1\\_8\\_en.pdf](https://www.agisoft.com/pdf/metashape_1_8_en.pdf) (accessed: 11.08.2025).
12. Pix4D Documentation Retrieved from <https://support.pix4d.com/hc/en-us/articles/360023629191> (accessed: 11.08.2025).
13. Brown, D. C. (1966). Decentering distortion of lenses. *Photogrammetric Engineering*, 32(3), 444–462.
14. Luhmann, T. et al. (2014). *Close-range photogrammetry and 3D imaging. 3rd ed. Berlin: De Gruyter*, 684 p.
15. Mogilny, S. G., Lunev, A. A., Sholomitsky, A. A. (2011). Structural calibration of a digital camera. *Izvestiya vuzov. Geodeziya i aerofotos"yomka. [News of universities. Geodesy and Aerial Photography]*, No. 2, 62–66.
16. Faugeras, O., Luong, Q.-T., Maybank, S. (1992). Camera self-calibration: Theory and experiments. *European Conference on Computer Vision – ECCV'92, LNCS 588*, 321–334.

17. Mogilny, S. G., Sholomitsky, A. A., Martynov, O. V. (2018). The effectiveness of self-calibration of a non-metric digital camera used on UAVs. *SGEM2018 Conference Proceedings*, 18(2.3), 199–209. DOI 10.5593/sgem2018/2.3/S10.026.
18. Kadnichevsky, S. A., Kurkov, M. V., Kurkov, V. M., Chibunichev, A. G. (2019). Photogrammetric calibration of a camera for UAV aerial surveying. *GeoProfi [GeoProfi]*, No. 6, 35–40.
19. Chibunichev, G., Kurkov, V. M., Smirnov, A. V., Govorov, A. V., Mikhailin, V. A. (2016). Investigation of phototriangulation accuracy using various laboratory and field calibration techniques. *The International Archives of the Photogrammetry, Remote Sensing and Spatial Information Sciences, Vol. XLI-B1, XXIII ISPRS Congress, 12–19 July 2016, Prague, Czech Republic*.
20. James, M. R., Robson, S. (2014). Mitigating systematic error in topographic models derived from UAV and ground-based image networks. *Earth Surface Processes and Landforms*, 39, 1413–1420. DOI 10.1002/esp.3609.
21. Sholomitsky, A. A., Tutanova, M. S. (2022). Measurement converter: State registration certificate for software No. 2022668209 dated 04.10.2022. Application No. 2022667849 of 04.10.2022. Bulletin No. 10, 04.10.2022.

### Об авторах

*Сергей Георгиевич Могильный* – доктор технических наук, профессор кафедры геоинформатики, геодезии и землеустройства.

*Андрей Аркадьевич Шоломицкий* – доктор технических наук, профессор кафедры инженерной геодезии и маркшейдерского дела.

*Мируэрт Серикпаевна Тутанова* – старший преподаватель кафедры маркшейдерского дела и геодезии.

*Никита Николаевич Леонов* – инженер-геодезист.

### Author details

*Sergey G. Mogilny* – D. Sc., Professor, Department of Geoinformatics, Geodesy and Land Management.

*Andrei A. Sholomitskii* – D. Sc., Professor, Department of Engineering Geodesy and Mine Surveying.

*Miruert S. Tutanova* – Senior Lecturer, Department of Surveying and Geodesy.

*Nikita N. Leonov* – Geodetic Engineer.

Получено / Received 14.08.2025

Поступила после рецензирования / Revised 23.04.2026

Принята к публикации / Accepted 06.05.2026