УДК 519.612
DOI 10.33764/2411-1759-2025-30-5-5-14

Анализ различных методов регуляризации плохо обусловленных и вырожденных систем линейных алгебраических уравнений

В. Нгомиракиза[1], *Ю. М. Нейман*[1]✉

Московский государственный университет геодезии и картографии,
г. Москва, Российская Федерация

e-mail: yuney@miigaik.ru

Аннотация. Статья посвящена сравнительному анализу различных методов регуляризации некорректных задач геодезии, сводящихся к решению плохо обусловленных или вырожденных систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Использованы основополагающие методы Тихонова с применением сингулярного разложения и гибридные итерационные методы на основе алгоритмов Ланцоша и Арнольди. Подобрано программное обеспечение и проделаны численные эксперименты с восемью различными вариантами регуляризации при решении модельных СЛАУ размером от 100 до 15 000. Сделанные выводы позволяют уверенно выбирать подходящий вариант регуляризации СЛАУ в зависимости от различных обстоятельств.

Ключевые слова: некорректная задача геодезии, регуляризация, вырожденная матрица, сингулярное разложение, гибридные итерационные методы

Для цитирования:
Нгомиракиза В., Нейман Ю. М. Анализ различных методов регуляризации плохо обусловленных и вырожденных систем линейных алгебраических уравнений // Вестник СГУГиТ. – 2025. – Т. 30, № 5. – С. 5–14. – DOI 10.33764/2411-1759-2025-30-5-5-14

Введение и постановка задачи

Известно, что большинство геодезических задач могут быть сформулированы в виде операторного уравнения [1–4]

$$Ax = b, x \in X, b \in B. \qquad (1)$$

Здесь A – известный замкнутый линейный оператор; b – исходные данные задачи; X и B – некоторые метрические пространства. Согласно классическому определению французского математика Адамара, задача (1) называется корректной в паре метрических пространств X и B, если выполняются следующие условия:

1) для любых исходных данных $b \in B$ существует решение $x \in X$;
2) это решение единственное;
3) это решение устойчивое в том смысле, что достаточно малому (в метрике B) изменению b соответствует сколь угодно малое (в метрике X) изменение x.

Однако в реальной геодезической практике, где исходные данные получаются, как правило, из измерений, зачастую приходится сталкиваться с обстоятельствами, в которых хотя бы одно из перечисленных условий не выполняется.

Разнообразные примеры проблемных задач геодезии можно найти в работе [2]. Одним из последних примеров может служить практическая реализация нового направления в моделировании гравитационного поля Земли в локальном районе [5]. Решения подобных некорректных задач достигаются специальными средствами регуляризации, основоположником которых является выдающийся советский математик А. Н. Тихонов. Задача статьи – проанализировать сравнительную эффективность наиболее известных разработок подобного типа применительно к решению плохо обусловленных и вырожденных систем линейных алгебраических уравнений, поскольку именно к решению СЛАУ сводится в конечном итоге большинство прикладных задач. Целью статьи является подбор соответствующего программного обеспечения.

Итак, пусть речь идет о решении СЛАУ вида

$$A_{n,n} \cdot x_{n,1}^{true} = b_{n,1}^{true} + \varepsilon_{n,1}, \qquad (2)$$

где $A_{n,n}$ – матрица коэффициентов размером $n \times n$; $x_{n,1}$ – искомое решение размером $n \times 1$; и $b_{n,1}^{true}$ – незашумленный столбец свободных членов размером $n \times 1$ и $\varepsilon_{n,1}$ – столбец случайных возмущений или ошибки измерений. Эффективность и надежность решения системы (2) с заданной точностью определяются свойствами матрицы $A_{n,n}$ (размер, симметричность, обусловленность, вырожденность и т. п.). В процессе исследований столбец случайных возмущений $\varepsilon_{n,1}$ правой части СЛАУ моделируется случайным нормальным вектором с нулевым математическим ожиданием и стандартом 10^{-4}.

Материалы и методы исследования

Исследование проведено на основе известных [4] тестовых некорректных задач $\left[A_{n,n}, x_{n,1}^{true}, b_{n,1}^{true}\right] = \text{shaw}(n)$ и $\left[A_{n,n}, x_{n,1}^{true}, b_{n,1}^{true}\right] = \text{foxgood}(n)$, моделирующих классическую некорректную задачу решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода в дискретном виде и генерирующих соответствующие данные с вырожденными квадратными матрицами $A_{n,n}$ в (2), где n – характеристика дискретизации.

Исследуемые методы регуляризации и правила выбора параметра регуляризации делятся на две группы: прямые и гибридные итерационные.

Прямые методы регуляризации на основе сингулярного разложения SVD: метод регуляризации Тихонова, метод декомпозиции затухающих сингулярных значений (Damped Singular Value Decomposition Method – DSVD) и метод усеченного сингулярного разложения (Truncated Singular Value Decomposition Method – TSVD). Для выбора параметра регуляризации исследованы обобщенная перекрестная проверка (Generalized Cross-Validation – GCV) и метод «L кривой» Хансена.

Гибридные итерационные методы на основе алгоритмов Ланцоша и Арнольди объединяют обобщенный метод минимальной невязки (Generalized Minimal Residual Method – GMRES), метод наименьших квадратов с QR-разложением (Least Squares QR factorization – LSQR) и метод регуляризации А. Н. Тихонова.

Для выбора параметра регуляризации в методе LSQR – Тихонова используется метод взвешенной обобщенной перекрестной проверки (Weighted Generalized Cross Validation – WGCV), а в методе GMRES – Тихонова – модифицированный метод обобщенной перекрестной проверки (Modified Generalized Cross Validation – MGCV).

Для вычислений подобного рода рекомендуется программное обеспечение, использованное в описываемых исследованиях и доступное на сайтах:

1) https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/52regtools#functions_tab;

2) https://github.com/silviagazzola/bilevel_adaptive_parameterChoice/tree/master/ExtraBilevel.

Методы регуляризации на основе сингулярного разложения

По определению сингулярное разложение (Singular Value Decomposition – SVD) матрицы $A_{m,n}$, где $m \geq n$, имеет вид [6, p. 5]

$$A_{m,n} = U \Sigma V^T = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i u_i v_i^T .$$

Здесь U имеет размер $m \times n$ и удовлетворяет равенству $U^T U = E$; V – квадратная матрица $n \times n$ и удовлетворяет равенству $V^T V = E$; Σ – диагональная матрица $diag(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$, где $\sigma_1 \geq \ldots \geq \sigma_n \geq 0$ – сингулярные числа.

Большие сингулярные числа соответствуют наиболее значимым направлениям преобразования в пространстве данных, а нулевые или малые указывают на близость к вырожденности матрицы.

Метод регуляризации Тихонова

Суть метода состоит в построении решения, определяемого из условия минимума функционала Лагранжа [6, p. 18; 7, p. 1–3]:

$$L(\lambda) = \left\| b - Ax_{reg} \right\|_2^2 + \lambda^2 \left\| Ex_{reg} \right\|_2^2 = \left\| \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A \\ -\lambda E \end{bmatrix} x_{reg} \right\|^2 \to \min. \quad (3)$$

Здесь λ – положительное число, называемое параметром регуляризации; E – единичная матрица размером $n \times n$, позволяющая повысить точность регуляризованного решения; $\left\| x_{reg} \right\|_2$ – норма решения СЛАУ; $\left\| Ax_{reg} - b \right\|_2$ – норма невязки.

Выражение (3) можно записать в блочном виде, откуда следует стандартная форма метода регуляризации Тихонова:

$$\left(A^T A + \lambda^2 E \right) x_{reg} = A^T b.$$

С использованием указанного выше сингулярного разложения матрицы A регуляризованное решение СЛАУ определяется выражением [6, p. 20]

$$x_{reg} = \left(\Sigma^2 + \lambda^2 E \right)^{-1} \Sigma U^T b V. \quad (4)$$

Выражение (4) можно переписать в виде линейной комбинации [6, p. 20; 7, p. 7]

$$x_{reg} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\sigma_i^2}{\sigma_i^2 + \lambda^2} \frac{u_i^T b}{\sigma_i} v_i = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \frac{u_i^T b}{\sigma_i} v_i, \quad (5)$$

где μ_i определяется соотношениями

$$\mu_i = \frac{\sigma_i^2}{\sigma_i^2 + \lambda^2} \approx \begin{cases} 1, \sigma_i \gg \lambda \\ \dfrac{\sigma_i^2}{\lambda^2}, \sigma_i \ll \lambda \end{cases}, \quad 0 < \mu_i < 1,$$

играющими роль своеобразных фильтров. Формулы для квадрата нормы регуляризованного решения и невязки можно найти в работах [6, p. 26; 8, p. 3].

Метод декомпозиции затухающих сингулярных значений

Регуляризованное решение методом DSVD имеет вид [4, p. 30]

$$x_{reg} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\sigma_i}{\sigma_i + \lambda} \frac{u_i^T b}{\sigma_i} v_i, \quad (6)$$

а квадрат нормы решения и невязки определяются следующими формулами:

$$\left\| x_{reg} \right\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\sigma_i}{\sigma_i + \lambda} \frac{u_i^T b}{\sigma_i} \right)^2, \left\| Ax_{reg} - b \right\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\lambda}{\sigma_i + \lambda} u_i^T b \right)^2.$$

Заметим, что если в формулах (5) и (6) принять $\lambda = 0$ и, следовательно, $\mu_i = 1$, то методы регуляризации Тихонова и декомпозиции затухающих сингулярных значений вырождаются в стандартные методы наименьших квадратов с крайне неустойчивым решением для малых значений сингулярного числа.

Метод усеченного сингулярного разложения

В методе регуляризации TSVD обрезается часть малых сингулярных значений, оставляя только l наибольших. Усеченное разложение имеет вид $A_l = U_l \Sigma_l V_l^T$, $1 \leq l \leq n$, где n – ранг матрицы A; U_l – состоит из первых l

столбцов U; Σ_l – диагональная $l \times l$ матрица, содержащая l наибольших сингулярных значений; V_l^T – состоит из l строк V^T [6, p. 25; 8, p. 4]. Основная задача – оптимально выбрать параметр обрезания l, играющий роль параметра регуляризации. Большие значения l приводят к более точной аппроксимации, но усиливают влияние неизбежных погрешностей (шума), а малые значения l снижают влияние шума, но могут привести к потере значимой информации. Решение приближенной системы уравнений $A_l x_l = b$ обеспечивает регуляризацию $x_{reg} = V_l \Sigma_l^{-1} U_l^T$.

Методы выбора параметра регуляризации на основе сингулярного разложения

Практически все методы регуляризации предполагают в той или иной мере компромисс между «размером» регуляризованного решения и качеством его соответствия имеющимся данным. При этом эффективность и надежность существенно зависят от правильного выбор параметра регуляризации.

Обобщенный метод перекрестной проверки

Этот метод не требует априорной информации о дисперсии шума. Параметр регуляризации определяется минимизацией функции GCV [4, p. 37]:

$$G(\vartheta) = \frac{\left\| Ax_\vartheta - b \right\|_2^2}{\left[\operatorname{trace}\left(E - AA_\vartheta^+ \right) \right]^2}, \quad \frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(G(\vartheta) \right)\Big|_{\vartheta = \vartheta_{\text{opt}}} = 0.$$

Здесь ϑ обозначает параметр регуляризации (λ или l); x_ϑ – регуляризованное решение; A_ϑ^+ – псевдообратная матрица A, зависящая от используемого метода регуляризации. Так, для методов регуляризации Тихонова, DSVD и TSVD матрица A_ϑ^+ соответственно выражается следующим образом:

$$A_\lambda^+ = \sum_{i=1}^{n} \frac{\sigma_i^2}{\sigma_i^2 + \lambda^2} \frac{u_i^T v_i}{\sigma_i}, \quad A_\lambda^+ = \sum_{i=1}^{n} \frac{\sigma_i}{\sigma_i + \lambda} \frac{u_i^T v_i}{\sigma_i}, \quad A_l^+ = \frac{u_i^T v_i}{\sigma_i}.$$

Удобная для методов Тихонова, DSVD и TSVD форма функции GCV указана в [6, p. 35].

Метод L-кривой Хансена

Суть данного метода заключается в исследовании и построении графика (в логарифмическом масштабе) нормы регуляризованного решения $\log\left\| x_\vartheta \right\|_2$ в зависимости от нормы соответствующей невязки $\log\left\| Ax_\vartheta - b \right\|_2$. Обычно этот график имеет форму буквы L, что и определяет название метода. Оптимальное значение параметра регуляризации ϑ определяется точкой максимальной кривизны графика [6–8]. При этом параметр ϑ зависит от используемого метода регуляризации и может играть роль λ или l. Если обозначить

$$\eta_\vartheta = \left\| x_\vartheta \right\|_2^2, \ \rho_\vartheta = \left\| Ax_\vartheta - b \right\|_2^2, \ \hat{\eta}_\vartheta = \log \eta_\vartheta, \ \hat{\rho}_\vartheta = \log \rho_\vartheta,$$

то L-кривую можно трактовать как зависимость $\hat{\eta}_\vartheta / 2$ от $\hat{\rho}_\vartheta / 2$, а явную формулу кривизны L-кривой можно найти, например, в работе [7, p. 11].

Отметим, что вертикальная часть L-кривой соответствует решениям, в которых величина $\left\| x_\vartheta \right\|_2$ наиболее чувствительна к изменениям параметра регуляризации, а горизонтальная часть соответствует решениям, в которых норма невязки $\left\| Ax_\vartheta - b \right\|_2$ более чувствительна к изменениям параметра регуляризации.

Гибридные итерационные методы в подпространствах Крылова

Наиболее эффективными и устойчивыми среди этих методов являются так называемые проекционные методы, особенно тот их класс, который связан с проектированием на подпространства Крылова. К достоинствам этих методов относятся устойчивость, эффективное распараллеливание и возможность работы с предобусловливателями разных типов [9].

Гибридный итерационный метод LSQR – Тихонова

В отличие от методов, основанных на сингулярном разложении, метод наименьших квадратов с QR-разложением использует итерационный подход, что позволяет избежать хранения всей исследуемой матрицы в памяти и сократить вычислительные затраты. При этом регуляризация выполняется стандартным методом регуляризации А. Н. Тихонова. Такой гибридный итерационный метод регуляризации удобно выполнять с использованием подпространств Крылова и процедуры бидиагонализации Ланцоша [9, 10].

Вспомним, что подпространство Крылова $K_k(A,b)$ – это линейная оболочка $b, Ab, A^2b, \ldots, A^{k-1}b$, а алгоритм бидиагонализации Ланцоша вычисляет два ортонормированных базиса $W_k = [w_1, \ldots, w_k]$ и $Z_k = [z_1, \ldots, z_k]$ крыловских подпространств $K'_k = K_k(A^T A, A^T b)$ и $K''_k = AK_k(A^T A, A^T b)$.

Алгоритм бидиагонализации Ланцоша подробно описан, например, в работе [9, p. 87]. Матричная форма указана в [10, p. 5; 11, p. 8].

Итерационный метод наименьших квадратов генерирует последовательность $\{x_k\}$ так, что норма соответствующих невязок $b - Ax_k$ монотонно убывает.

Устойчивость решению, как отмечалось выше, обеспечивает стандартный метод регуляризации А. Н. Тихонова.

Гибридный итерационный метод GMRES – Тихонова на основе алгоритма Арнольди

Обобщенный метод минимальной невязки – это итерационный метод численного решения неопределенной несимметричной системы линейных уравнений. Метод аппроксимирует решение вектором в подпространстве Крылова с минимальной невязкой. Для нахождения этого вектора рекомендуется итерационный процесс Арнольди, состоящий в определении ортонормированного базиса $\{v_1, \ldots\ldots, v_k\}$ в подпространстве Крылова $K_k(A,b)$. Описание алгоритма Арнольди можно найти, например, в работе [9, p. 91]. Матричная форма указана в [12, p. 2].

Суть метода GMRES с использованием указанного алгоритма состоит в нахождении решения x_k под условием минимизации следующего соотношения в подпространстве Крылова K_k [9, p. 10, 11]:

$$\min\|b - Ax_k\|, x \in K_k.$$

Устойчивость решению обеспечиваетобъединение указанного итерационного метода GMRES со стандартным методом регуляризации А. Н. Тихонова.

Результаты и обсуждение

Многочисленные эксперименты позволили выполнить сравнительный анализ надежности и эффективности указанных выше методов регуляризации при решении плохо обусловленных и вырожденных СЛАУ.

Для оценки эффективности и надежности указанных методов регуляризации используется критерий в виде относительной погрешности $\alpha = \frac{x_{true} - X_{reg}}{x_{true}}$, где X_{reg} обозначает регуляризованное решение, а x_{true} – модельное точное решение. Результаты проведенных исследований представлены в табл. 1, 2, где n – размер квадратной матрицы A; η – норма решения СЛАУ; ρ – норма невязки; λ, l – параметры регуляризации (l для метода регуляризации TSVD); α – относительная ошибка регуляризованного решения; T – затраты времени вычислений. Проанализировано 8 различных вариантов регуляризации. Методы Тихонова, DSVD, TSVD обозначают прямые методы регуляризации на основе сингулярного разложения SVD, а методы LSQR – Тихонова, GMRES – Тихонова – гибридные итерационные методы регуляризации на основе алгоритмов Ланцоша и Арнольди соответственно. Методы L-кривой, GCV и WGCV указывают правила выбора параметра регуляризации λ или l.

Таблица 1

Результаты, полученные по тестовой модели shaw (n)

n	Метод	η	ρ	λ, l	α	T (сек)
100	L-кривой – Тихонова	9,979257	0,001076	0,000128	0,054595	0,9
	GCV – Тихонова	9,975361	0,001078	0,000414	0,035202	
	L-кривой – DSVD	**14,05972**	**0,001526**	**0,000108**	**0,994883**	
	GCV – DSVD	**121,9466**	**0,001078**	**8,841e-06**	**12,17639**	
	L-кривой – TSVD	**2,58e + 11**	**0,001016**	**23**	**2,59e + 10**	
	GCV – TSVD	9,976199	0,001077	9	0,032204	
	WGCV (LSQR – Тихонова)	9,949926	0,000393	0,005041	0,059658	0,7
	MGCV (GMRES – Тихонова)	9,969561	0,001211	0,002441	0,047364	
5 000	L-кривой – Тихонова	70,55586	0,006981	0,000108	0,022217	257,6
	GCV – Тихонова	70,59448	0,006979	3,981e-05	0,025272	
	L-кривой – DSVD	**103,6914**	**0,009523**	**9,184e-05**	**1,076994**	
	GCV – DSVD	**9,69e + 03**	**0,006977**	**7,200e-07**	**137,2985**	
	L-кривой – TSVD	70,54789	0,006984	9	0,032058	
	GCV – TSVD	70,62023	0,006979	10	0,027662	
	WGCV (LSQR – Тихонова)	70,35414	0,000393	0,005015	0,059676	2,9
	MGCV (GMRES – Тихонова)	70,49108	0,008294	0,002589	0,047582	
10 000	L-кривой – Тихонова	99,77955	0,009910	0,000108	0,022291	2162
	GCV – Тихонова	99,83574	0,009909	3,368e-05	0,023620	
	L-кривой – DSVD	**146,9566**	**0,013496**	**9,184e-05**	**1,081102**	
	GCV – DSVD	**18933544**	**0,009903**	**5,231e-11**	**1896764**	
	L-кривой – TSVD	99,76947	0,009915	9	0,032063	
	GCV – TSVD	99,86209	0,009909	10	0,026144	
	WGCV (LSQR – Тихонова)	99,49420	0,000393	0,0049715	0,059700	6,2
	MGCV (GMRES – Тихонова)	99,77443	4,292e-05	5,2683e-05	0,023348	
12 000	L-кривой – Тихонова	109,2953	0,010972	0,0001085	0,024716	3769,3
	GCV – Тихонова	**14019,56**	**0,010966**	**5,6446e-09**	**128,2105**	
	L-кривой – DSVD	**161,8968**	**0,014869**	**9,1840e-05**	**1,092914**	
	GCV – DSVD	**995365,8**	**0,010966**	**1,1017e-08**	**9102,769**	
	L-кривой – TSVD	109,2901	0,010974	9	0,032058	
	GCV – TSVD	**25482,38**	**0,010966**	**15**	**233,0414**	
	WGCV (LSQR – Тихонова)	108,9936	0,000393	0,0050144	0,059616	12,9
	MGCV (GMRES – Тихонова)	109,3112	4,317e-05	4,6331e-05	0,021657	
15 000	WGCV (LSQR – Тихонова)	121,8579	0,000393	0,0049615	0,059689	103,3
	MGCV (GMRES – Тихонова)	122,2109	4,251e-05	6,1438e-05	0,020347	

Из табл. 1 видно, что изменение параметра регуляризации сильно отражается на окончательном решении. Особо выделяется ненадежность методов на основе сингулярного разложения при решении СЛАУ большого размера. Среди методов регуляризации на основе сингулярного разложения метод L-кривой – Тихонова показывает достаточно эффективные и надежные результаты с относительной ошибкой меньше 7 % для всех указанных размеров. Что касается методов L-кривой – DSVD, GCV – DSVD, L-кривой – TSVD с размером $n = 100$, L-кривой – DSVD, GCV – DSVD с размерами $n = 5\,000,\ 10\,000$ и L-кривой – DSVD, GCV – DSVD, L-кривой – TSVD, GCV – TSVD с размером $n = 12\,000$, то их относительная ошибка превышает 7 %, и поэтому эти методы следует признать недостаточно эффективными при решении СЛАУ указанных размеров. Методы WGCV (LSQR – Тихонова) и MGCV (GMRES – Тихонова) хорошо показали себя при решения СЛАУ всех указанных размеров и при этом требуют сравнительно небольшого объема вычислений.

Таблица 2

Результаты, полученные по тестовой модели fooxgood (n)

n	Метод	η	ρ	λ, l	α	T (сек)
100	L-кривой – Тихонова	5,774608	0,001080	0,000218	0,020550	1,1
	GCV – Тихонова	5,773822	0,001083	0,001339	0,012023	
	L-кривой – DSVD	**8,212806**	**0,001519**	**0,000185**	**1,012113**	
	GCV – DSVD	**60,90756**	**0,001084**	**1,781e-05**	**10,50213**	
	L-кривой – TSVD	5,774069	0,001084	3	0,007182	
	GCV – TSVD	5,774069	0,001084	3	0,007183	
	WGCV (LSQR – Тихонова)	5,773242	0,001094	0,002263	0,009982	1,1
	MGCV (GMRES – Тихонова)	5,772277	0,001136	0,003507	0,010657	
5 000	L-кривой – Тихонова	40,82707	0,006985	0,000218	0,007775	254,4
	GCV – Тихонова	40,86300	0,006982	5,739e-05	0,041742	
	L-кривой-DSVD	**60,46972**	**0,009464**	**0,000156**	**1,092959**	
	GCV-DSVD	**3445,439**	**0,006981**	**2,026e-06**	**84,38975**	
	L-кривой – TSVD	40,91862	0,006982	7	0,066654	
	GCV – TSVD	40,91245	0,006982	6	0,064253	
	WGCV (LSQR-Тихонова)	40,82213	0,006999	0,001320	0,004395	3,7
	MGCV (GMRES – Тихонова)	40,81252	0,007334	0,003329	0,009133	
10 000	L-кривой – Тихонова	57,73589	0,009967	0,000185	0,009138	2176
	GCV – Тихонова	57,73503	0,009967	0,000258	0,007041	
	L-кривой – DSVD	**85,94505**	**0,013450**	**0,000157**	**1,103043**	
	GCV – DSVD	**6871,400**	**0,009965**	**1,450e-06**	**119,0119**	
	L-кривой – TSVD	57,73661	0,009967	5	0,010472	
	GCV – TSVD	57,73462	0,009968	4	0,002361	
	WGCV (LSQR – Тихонова)	57,73089	0,000223	0,001185	0,004487	11,3
	MGCV (GMRES – Тихонова)	57,73436	0,000223	0,000181	0,002396	
12 000	L-кривой – Тихонова	63,24535	0,011046	0,000185	0,003408	3482,6
	GCV – Тихонова	63,24478	0,011046	0,000306	0,001936	
	L-кривой – DSVD	**86,96115**	**0,016087**	**0,000185**	**0,944134**	
	GCV – DSVD	**29005,44**	**0,011042**	**3,807e-07**	**458,6152**	
	L-кривой – TSVD	63,24512	0,011046	4	0,002386	
	GCV – TSVD	63,24512	0,011046	4	0,002386	
	WGCV (LSQR – Тихонова)	63,24125	0,000223	0,001270	0,003461	21,5
	MGCV (GMRES – Тихонова)	63,24686	0,000222	0,000119	0,003463	
15 000	WGCV (LSQR – Тихонова)	70,70701	0,000222	0,001057	0,005434	120,2
	MGCV (GMRES – Тихонова)	70,70988	0,000222	0,000194	0,003867	

Из табл. 2 видно, что методы L-кривой – DSVD и GCV – DSVD – не позволили решать СЛАУ с высокой точностью. Относительная ошибка остальных исследованных методов меньше 7 %. Гибридные итерационные методы WGCV (LSQR – Тихонова) и MGCV (GMRES – Тихонова) надежно решают СЛАУ всех указанных размеров.

Представленные результаты показали, что недостаточно тщательный выбор параметра регуляризации в методах L-кривой и GCV может привести к так называемому переобучению (решение вполне устойчиво, но значимо смещено относительно истинного значения) или недообучению (решение достаточно несмещенное, но неустойчивое).

Выводы

На основе результатов проведенных исследований сделан вывод о том, что правильный выбор параметра регуляризации является принципиально необходимым условием для получения устойчивого решения с требуемой точностью. Поэтому алгоритмы, объединяющие методы выбора параметра регуляризации, такие как L-кривой и GCV, методы регуляризации Тихонова, TSVD, DSVD и соответствующие программные обеспечения желательно использовать для решения СЛАУ сравнительно небольшого размера (в пределах 12 000). Затраты времени около 60 минут.

Применение сингулярного разложения может быть слишком трудоемким при решении СЛАУ большого размера (больше 12 000) и доступно только при наличии очень большого размера оперативной памяти компьютера.

Гибридные итерационные методы регуляризации LSQR – Тихонова, GMRES – Тихонова и соответствующие компьютерные программы обеспечивают универсальную регуляризацию, т. е. они позволяют найти устойчивое решение для всех указанных размеров СЛАУ со сравнительно небольшими временными затратами (в пределах десятка минут).

Содержание табл. 1, 2, отражающее проделанные численные эксперименты, и подобранное программное обеспечение позволяют обоснованно выбирать подходящий вариант регуляризации СЛАУ в зависимости от реальных обстоятельств, возможных временных затрат и требуемой надежности.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Грешилов А. А. Некорректные задачи и многокритериальное программирование // Инженерный журнал: наука и инновации. – 2015. – № 2. – С. 1–11.

2. Тихонов А. Н., Большаков В. Д., Нейман Ю. М. Некорректные задачи геодезии // Известия вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. – 1980. – № 1. – С. 45–53.

3. Лебедев А. Л. Решение некорректных задач методами многокритериального математического программирования // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Сер. Естественные науки. – 2008. – № 4. – С. 89–99.

4. Hansen P. C. A MATLAB Package for Analysis and Solution of Discrete Ill-Posed Problems. Informatics and Mathematical Modelling // Technical University of Denmark. – 2008. – 128 p.

5. Мазурова Е. М., Нейман Ю. М., Сугаипова Л. С. Система сферических функций, ортогональных в локальном сегменте сферы // Геодезия и картография. – 2024. – № 4. – С. 2–9. – DOI 10.22389/0016-7126-2024-1006-4-2-9.

6. Hnetynkova I., Plesinger M., Strako Z. Ill–Posed Inverse Problems in Image Processing. Introduction, Structured matrices, Spectral filtering, Regularization, Noise revealing. Faculty of Mathematics and Physics // Charles University. Prague. – 2008. – 60 p.

7. Hansen P. C. The L-curve and its use in the numerical treatment of inverse problems. Informatics and Mathematical Modelling // Technical University of Denmark. – 24 p.

8. Hansen P. C., Jensen T. K., Rodriguez G. An adaptive pruning algorithm for the discrete L-curve criterion // Journal of Computational and Applied Mathematics. – 2007. – 198 (2). – Pp. 483–492.

9. Gazzola S., Novati P., Russo M. R. On Krylov projection methods and Tikhonov regularization // Electronic Transactions on Numerical Analysis. – 2015. – V. 44. – Pp. 83–123.

10. Paige C. C., Saunders M. A. LSQR: An Algorithm for Sparse Linear Equations and Sparse Least Squares // ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS). – 8 (1). – Pp. 43–71.

11. Larsen R. M. Lanczos bidiagonalization with partial reorthogonalization // DAIMI Report Series. – 1998. – 27 (537). – 102 p.

12. Novati P., Russo M. R. A GCV based Arnoldi-Tikhonov regularization method // BIT Numerical Mathematics. – 2013. – 22 p.

Об авторах

Вильям Нгомиракиза – аспирант кафедры высшей математики.

Юрий Михайлович Нейман – доктор технических наук, профессор кафедры высшей математики.

Получено 11.06.2025

Comparative analysis of regularization techniques for ill-posed and degenerate systems of linear algebraic equations

W. Ngomirakiza[1], *Yu. M. Neyman*[1]✉

Moscow State University of Geodesy and Cartography,
Moscow, Russian Federation,

e-mail: yuney@miigaik.ru

Abstract. A comparative analysis of various regularization methods applied to ill-posed problems in geodesy, specifically those involving ill-conditioned or degenerate systems of linear algebraic equations (SLAEs) is presented in the article. The study focuses on fundamental Tikhonov regularization techniques utilizing singular value decomposition, alongside hybrid iterative methods based on the Lanczos and Arnoldi algorithms. Suitable software tools were selected to perform numerical experiments encompassing eight distinct regularization approaches on model SLAEs of sizes ranging from 100 to 15,000 equations. The results provide clear guidance for selecting the most appropriate regularization method for SLAEs under varying conditions.

Keywords: ill-posed geodesy problems, regularization, degenerate matrices, singular value decomposition, hybrid iterative methods

REFERENCES

1. Greshilov A. A. (2015) Ill-posed problems and multi-criteria programming. *Inzhenernyj zhurnal: nauka i innovacii* [*Engineering Journal: Science and Innovation*], 2, 1– 11. – DOI 10.18698/2308-6033-2015-2-1367 [in Russian].

2. Tihonov A. N., Bol'shakov V. D., Neyman Yu. M. (1980) Ill-posed problems in geodesy. *Izvestia Vuzov. Geodezija i aerofotos"jomka* [*Izvestia Vuzov. Geodesy and Aerophotosurveying*], 1, 45–53 [in Russian].

3. Lebedev A. L. (2008) Solving ill-posed problems by means of multi-criteria programming. *Vestn. Mosk. Gos. Tech. Univ. im. N. E. Baumana*, *Estestv. Nauki* [*Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.*], 4, 89–99 [in Russian].

4. Hansen P. C. (2008). A MATLAB Package for Analysis and Solution of Discrete Ill-Posed Problems. Informatics and Mathematical Modelling. *Technical University of Denmark.* 128 p.

5. Mazurova E. M., Nejman Yu. M., Sugaipova L. S. (2024) A system of spherical functions orthogonal in the local segment of the sphere. *Geodezia i Kartografia* [*Geodesy and Cartography*], 4, 2–9 DOI:10.22389/0016-7126-2024-1006-4-2-9 [in Russian].

6. Hnetynkova I., Plesinger M., Strako Z. (2008). Ill–Posed Inverse Problems in Image Processing. Introduction, Structured matrices, Spectral filtering, Regularization, Noise revealing. Faculty of Mathematics and Physics. *Charles University. Prague.* 60 p.

7. Hansen P. C. The L-curve and its use in the numerical treatment of inverse problems. Informatics and Mathematical Modelling. *Technical University of Denmark.* 24 p.

8. Hansen P. C., Jensen T. K. (2008). Rodriguez G. An adaptive pruning algorithm for the discrete L-curve criterion. *Journal of Computational and Applied Mathematics.* 198(2). Pp. 483–492.

9. Gazzola S., Novati P., Russo M. R. (2015). On Krylov projection methods and Tikhonov regularization. *Electronic Transactions on Numerical Analysis.* V. 44. Pp. 83–123.

10. Paige C. C., Saunders M. A. LSQR: An Algorithm for Sparse Linear Equations and Sparse Least Squares. *ACM Transactions on Mathematical Software* (TOMS). 8(1). Pp. 43–71.

11. Larsen R. M. (1998). Lanczos bidiagonalization with partial reorthogonalization. *DAIMI Report Series*. 27(537). 102 p.

12. Novati P., Russo M. R. (2013). A GCV based Arnoldi-Tikhonov regularization method. *BIT Numerical Mathematics.* 22 p.

Author details

Wiliam Ngomirakiza – Ph. D. Student, Department of Higher Mathematics.
Yuri M. Neyman – D. Sc., Professor, Department of Higher Mathematics.

Received 11.06.2025