УДК 531.5:006
DOI 10.33764/2411-1759-2025-30-1-169-185

Динамическая гравитация как эквивалент инерции в механике и единица ее измерения

С. В. Савелькаев[1]✉

[1]Сибирский государственный университет геосистем и технологий, г. Новосибирск, Российская Федерация

e-mail: sergei.savelkaev@yandex.ru

Аннотация. В работе проведен динамический анализ механической системы, состоящей из двух взаимодействующих тел, связанных прямолинейным жестким стержнем, концы которого закреплены на этих телах с помощью идеальных шарниров. Механическая система имеет пять степеней свободы. Ее тела по отношению к их центру масс, а также по отношению друг к другу совершают сложное поступательно-вращательное движение по траекториям в виде окружностей с диаметральным распределением. Исходя из аксиомы связей, примененной для сил инерции взаимодействующих тел этой механической системы, и принципа Д'Аламбера, показано, что движение ее тел совершается в центральном поле их относительных сил инерции. Показано, что время в собственных системах отсчета тел по отношению ко времени в системе отсчета их центра масс протекает по-разному и зависит от масс этих тел. Время в неподвижной системе отсчета и системе отсчета центра масс тел при их диаметральном распределении абсолютно. Исходя из принципа эквивалентности гравитации и инерции, центральное поле относительных сил инерции отождествлено с динамическим гравитационным полем, что определяет единицу его измерения.

Ключевые слова: двухмассовая механическая система, импульс, относительность времени, динамическое гравитационное поле

Для цитирования:
Савелькаев С. В. Динамическая гравитация как эквивалент инерции в механике и единица ее измерения // Вестник СГУГиТ. – 2025. – Т. 30, № 1. – С. 169–185. – DOI 10.33764/2411-1759-2025-30-1-169-185

Введение

В современной механике силы инерции рассматривают с различных точек зрения. Так, например, в работе [1] их рассматривают как фиктивные, что противоречит принципу Д'Аламбера [2], где они в соответствии с законами Ньютона являются реальными.

В работах [3, 4] сила инерции рабочего (ускоряющего) тела приложена к опорному (ускоряемому) телу через их связь, вызывающую взаимодействие этих тел. Показано, что эту связь можно условно отбросить от опорного тела, а ее реакцию заменить силой инерции рабочего тела, которой противодействует собственная сила инерции опорного тела. Это распространяет принцип Д'Аламбера на движение каждого из взаимодействующих тел и обеспечивает применение законов Ньютона для их динамического анализа с учетом сил инерции.

В представленной работе силы инерции взаимодействующих материальных тел рассматриваются как их фундаментальное свойство, выражающееся в противодействии этих тел искривлению траекторий их движения силами взаимодействия любой природы (Ньютона, Кулона или Гука). Действие сил инерции как объемных сил отождествлено с динамическим центральным силовым полем. При этом показано, что центральное динамическое поле сил инерции механической системы, состоящей из двух взаимодействующих тел, создается относительными силами инерции этих тел, каждое из которых одновременно участвует в переносном и относительном движениях.

Целью работы является динамический анализ двухмассовой механической системы (МС2) с числом степеней свободы $N = 5$ в центральном динамическом поле относительных сил инерции ее взаимодействующих тел.

Распределение импульсов МС2 при ее формировании

Выделим в пространстве замкнутую систему двух не взаимодействующих тел m_1 и m_2, которая показана на рис. 1.

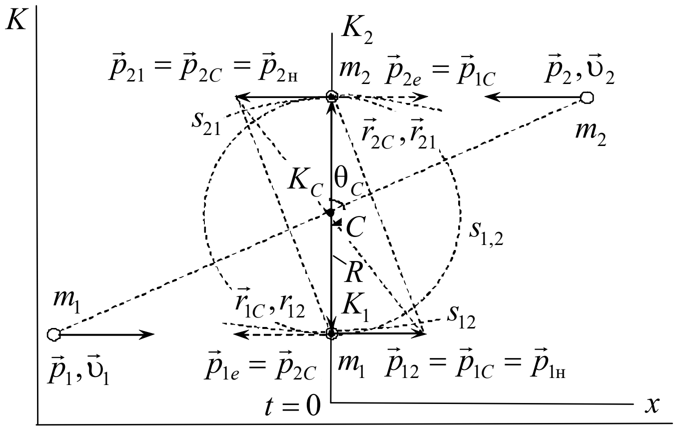

Рис. 1. Формирование МС2 в абсолютном пространстве

Ее тела m_1 и m_2 совершают в лабораторной системе отсчета K прямолинейное и равномерное движение навстречу друг другу со скоростями $\vec{\upsilon}_1$ и $\vec{\upsilon}_2$ и имеют импульсы $\vec{p}_1 = m_1\vec{\upsilon}_1$ и $\vec{p}_2 = m_2\vec{\upsilon}_2 = -m_1\vec{\upsilon}_1$, так что суммарный импульс $\vec{p}_C = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = m\vec{\upsilon}_C = \sum_i m_i\vec{\upsilon}_i$ этой замкнутой системы тел сохраняется:

$$d\vec{p}_C / dt = d(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) / dt = 0, \tag{1}$$

где $\vec{\upsilon}_C = 0$ – скорость ее ЦМ C в системе отсчета K и $m = m_1 + m_2$ – суммарная масса ее тел.

Пусть тела m_1 и m_2 в момент времени $t = 0$ вступают во взаимодействие посредством прямолинейного идеального стержня с длиной R, концы которого закреплены на этих телах посредством идеальных шарниров. Для времени $t > 0$ система тел m_1 и m_2, взаимодействующих этим стержнем R, представляет собой замкнутую МС2, телам m_1 и m_2 которой в момент времени $t = 0$ сообщены начальные импульсы $\vec{p}_{1н} = \vec{p}_1$ и $\vec{p}_{2н} = \vec{p}_2$ (см. рис. 1).

Для анализа движения сформированной замкнутой МС2 в момент времени $t = 0$ введем собственные системы отсчета K_1 и K_2 ее тел m_1 и m_2, а также систему отсчета K_C ее ЦМ C.

Движение тел m_1 и m_2 вместе с их собственными системами отсчета K_1 и K_2 в системе отсчета K по траектории $s_{1,2}$ (общей для $m_1 = m_2$) будем рассматривать как переносное, а движение этих тел m_2 и m_1 в системах отсчета K_1 и K_2 по траекториям s_{12} и s_{21} (на рис. 1 показаны частично) – как относительное.

Переносные импульсы $\vec{p}_{1e}$ и $\vec{p}_{2e}$ тел m_1 и m_2 выразим через импульсы $\vec{p}_{1C}$ и $\vec{p}_{2C}$ этих тел в системе отсчета K_C в виде

$$\vec{p}_{1e} = \vec{p}_{2C}; \vec{p}_{2e} = \vec{p}_{1C}. \quad (2)$$

Относительный импульс $\vec{p}_{12}$ тела m_1 в системе K_2 и одновременно его импульс $\vec{p}_{1C}$ в системе отсчета K_C определен его начальным импульсом $\vec{p}_{1н} = \vec{p}_1$ в момент времени $t = 0$

$$\vec{p}_{12} = \vec{p}_{1C} = \vec{p}_{1н}. \quad (3)$$

Аналогично относительный импульс $\vec{p}_{21}$ тела m_2 в системе K_2 и одновременно его импульс $\vec{p}_{2C}$ в системе отсчета K_C определен его начальным импульсом $\vec{p}_{2н} = \vec{p}_2$ в момент времени $t = 0$

$$\vec{p}_{21} = \vec{p}_{2C} = \vec{p}_{2н}. \quad (4)$$

Равенство импульсов $\vec{p}_{12} = \vec{p}_{1C}$ и $\vec{p}_{21} = \vec{p}_{2C}$ в (3) и (4) будет обосновано исходя из инвариантности событий в системах отсчета K, K_C, K_1 и K_2 при анализе их времени t, t_C, t_1 и t_2.

Почленное сумирование (3) и (4) требует, чтобы импульсы $\vec{p}_1$, $\vec{p}_2$, $\vec{p}_{1н}$, $\vec{p}_{2н}$, $\vec{p}_{12}$, $\vec{p}_{21}$, $\vec{p}_{1C}$ и $\vec{p}_{2C}$ удовлетворяли сохранности импульса до, во время и после начала взаимодействия тел m_1 и m_2 рассматриваемой замкнутой МС2

$$\vec{p}_C = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_{1н} + \vec{p}_{2н} = \vec{p}_{12} + \vec{p}_{21} = \vec{p}_{1C} + \vec{p}_{2C} = 0. \quad (5)$$

В работе [3] показано, что сумма переносных $\vec{p}_{1e} = \vec{p}_{2C}$, $\vec{p}_{2e} = \vec{p}_{1C}$ и относительных $\vec{p}_{12}$, $\vec{p}_{12}$ импульсов тел m_1 и m_2 равна

$$\vec{p}_{2C} + \vec{p}_{12} = 0; \vec{p}_{1C} + \vec{p}_{21} = 0. \quad (6)$$

Это удовлетворяет сохранности импульса (5) в виде

$$\vec{p}_C = \vec{p}_{1C} + \vec{p}_{21} + \vec{p}_{2C} + \vec{p}_{12} = 0 \quad (7)$$

и тому, что абсолютные скорости

$$\vec{\upsilon}_1 = \vec{\upsilon}_{2C} + \vec{\upsilon}_{12}; \vec{\upsilon}_2 = \vec{\upsilon}_{1C} + \vec{\upsilon}_{21} \quad (8)$$

тел m_1 и m_2 при $t = 0$ обращаются в нуль $\vec{\upsilon}_1 = \vec{\upsilon}_2 = 0$ (см. рис. 1).

Сохранность импульса (5) также выполняется и для переносных импульсов $\vec{p}_{1e} = \vec{p}_{2C}$ и $\vec{p}_{2e} = \vec{p}_{1C}$ тел m_1 и m_2, так как по определению ЦМ C [2, 5]

$$\vec{p}_{1C} + \vec{p}_{2C} = 0, \quad (9)$$

где $\vec{p}_{1C} = m_1\vec{\upsilon}_{1C}$ и $\vec{p}_{2C} = m_2\vec{\upsilon}_{2C}$.

Аналогичное определение

$$\vec{p}_{12} + \vec{p}_{21} = 0 \tag{10}$$

справедливо и для относительных импульсов $\vec{p}_{12} = m_1\vec{\upsilon}_{12}$ и $\vec{p}_{21} = m_2\vec{\upsilon}_{21}$, которое следует из (7) и (9).

Равенства (6), (9) и (10) устанавливают связь между переносными $\vec{p}_{1e} = \vec{p}_{2C}$, $\vec{p}_{2e} = \vec{p}_{1C}$ и относительными $\vec{p}_{12}$, $\vec{p}_{21}$ импульсами рассматриваемой замкнутой МС2 в виде их распределения:

$$\vec{p}_{1C} = -\vec{p}_{21};\ \vec{p}_{2C} = -\vec{p}_{12};\ \vec{p}_{1C} = -\vec{p}_{2C};\ \vec{p}_{12} = -\vec{p}_{21}, \tag{11}$$

где знак «минус» характеризует то, что распределение тел m_1 и m_2 в системе отсчета K_C диаметрально $\theta_C = -\pi$ (см. рис. 1), а выбор знака перед числом $\pm\pi$ соответствует поступательно-вращательному движению тел m_1 и m_2 против хода часовой стрелки, принятому в работе.

Сформированная МС2 имеет пять степеней свободы: четыре независимые полярные координаты r_{1C}, φ_{1C}, r_{2C}, φ_{2C} тел m_1 и m_2 в системе отчета K_C (независимость координат φ_{1C} и φ_{2C} будет обоснована при кинематическом анализе МС2) плюс одна дополнительная независимая координата φ_{12} или φ_{21} из двух зависимых полярных координат $\varphi_{12} = -\varphi_{21}$ тел m_1 и m_2 в системах отсчета K_2 и K_1, что соответствует классическому определению числа степеней свободы МС2 $N = 3n - l = 6 - 1 = 5$, где $n = 2$ – количество тел МС2, участвующих в плоском движении, которые имеют по три степени свободы; $l = 1$ – количество связей ее тел m_1 и m_2 – прямолинейный идеальный стержень R.

Пятая степень свободы рассматриваемой МС2 характеризует относительное движение ее тел m_1 и m_2 с импульсами $\vec{p}_{12}$ и $\vec{p}_{21}$ в системах отсчета K_2 и K_1. Исключение из рассмотрения пятой степени свободы и, следовательно, систем отсчета K_1 и K_2 сводит сформированную МС2 к твердому телу, движение которого в системе отсчета K подчиняется известным законам механики [2, 5].

Кинематический анализ МС2

Для удобства кинематического и дальнейшего динамического анализа сформированной МС2 (см. рис. 1) представим ее в виде, показанном на рис. 2, *а*.

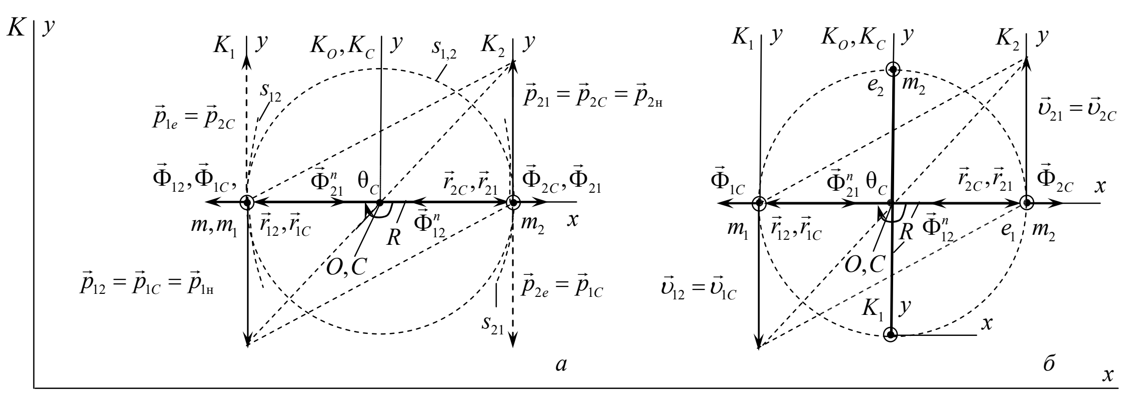

Рис. 2. Двухмассовая механическая система: *а*) с диаметральным распределением тел m_1 и m_2; *б*) карта событий e_1 и e_2 ее тела m_2

Ее взаимодействующие тела m_1 и m_2 МС2 совершают в системе отсчета K_C, неподвижной по отношению системе отсчета K, сложное поступательно-вращательное движение вместе с их собственными системами отсчета K_1 и K_2 так, что оси координат x и y всех этих систем отсчета, а также сопутствующей системы отсчета K_O, связанной с мгновенным центром O скоростей тел m_1 и m_2, всегда параллельны друг другу. Поступательно-вращательное движение тел m_1 и m_2 в системе отсчета K_C совершается по окружности $s_{1,2}$ (общей для $m_1 = m_2$), которая определяется радиусами-векторами $\vec{r}_{1C} = -\vec{r}_{2C}$. Также по отношению к системам отсчета K_2 и K_1 тела m_1 и m_2 совершают поступательно-вращательное движение по окружностям s_{12} и s_{21} (на рис. 2, *а* показаны частично), определяющимся радиусами-векторами $\vec{r}_{12}$ и $\vec{r}_{21}$.

Траекторией движения тел m_1 и m_2 в системе отсчета K так же, как и в системе отсчета K_C, является окружность $s_{1,2}$, так как система отсчета K_C неподвижна. Радиусы-векторы $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$, определяющие положение окружности $s_{1,2}$, в системе отсчета K не показаны.

При $m_1 \geq m_2$ тело m_1 можно рассматривать как опорное (ускоряемое), а тело m_2 – как рабочее (ускоряющее); при $m_2 \geq m_1$ наоборот: m_2 – опорное и m_1 – рабочее и при $m_1 = m_2$ выбор опорного и рабочего тел равноправен.

Относительное поступательно-вращательное движение $\vec{p}_{12} = \vec{p}_{1C} = \vec{p}_{1\text{н}}$ и $\vec{p}_{21} = \vec{p}_{2C} = \vec{p}_{2\text{н}}$ тел m_1 и m_2 в системах отсчета K_1, K_2 и K_C вызвано тем, что им в момент времени $t = 0$ в системе отсчета K сообщены начальные импульсы $\vec{p}_{1\text{н}}$ и $\vec{p}_{2\text{н}}$, которые в проекциях на оси y и x координат этой системы отсчета составляют $p_{1y\text{н}} = -p_{1\text{н}}$, $p_{2y\text{н}} = p_{2\text{н}}$ и $p_{1x\text{н}} = p_{2x\text{н}} = 0$ (см. рис. 2, *а*).

Для начальных импульсов $p_{1y\text{н}} + p_{2y\text{н}} = 0$ тел начала координат C и O систем отсчета K_C ЦМ C и сопутствующей ей системы отсчета K_O, связанной с мгновенным центром O скоростей тел m_1 и m_2, совпадают, что позволяет для случая $p_{1y\text{н}} + p_{2y\text{н}} = 0$ исключить из рассмотрения сопутствующую систему отсчета K_O. Эта система отсчета необходима для начальных импульсов $p_{1y\text{н}} + p_{2y\text{н}} \neq 0$, когда начала координат C и O систем отсчета K_C и K_O не совпадают и движение тел m_1 и m_2 для времени $t = dt >> 0$ будет совершаться относительно мгновенного центра скоростей O совместно с ЦМ C тел m_1 и m_2 в системе отсчета K_O при их радиальном распределении $\theta_O \neq \pi$ относительно этого центра [3]. Возможность радиального распределения определяет независимость полярных координат φ_{1C} и φ_{2C}. Радиальное распределение тел m_1 и m_2 в настоящей работе не рассматривается.

Начальные импульсы $p_{1y\text{н}}$ и $p_{2y\text{н}}$ тел m_1 и m_2 определяют запаздывание

$$\theta_C = \varphi_{2C} - \varphi_{1C} = -\arccos(p_{1y\text{н}} / p_{2y\text{н}}) = -\pi \tag{12}$$

фазы φ_{1C} поступательно-вращательного движения тела m_1 относительно фазы φ_{2C} поступательно-вращательного движения тела m_2 в системе отсчета K_C [3]. При диаметральном распределении $\theta_C = -\pi$ (12) фаза φ_{1C} движения тела m_1 в системе отсчета K_C связана с фазой φ_{21} движения тела m_2 в собственной системе отсчета K_1 тела и по аналогии для тела m_2 преобразованиями:

$$\varphi_{1C} = \varphi_{21} - \pi;\ \varphi_{2C} = \varphi_{12} - \pi, \qquad (13)$$

что иллюстрируется рис. 2, *а*.

Относительные скорости ω_{12} и ω_{21} поступательно-вращательного движения тел m_1 и m_2 в системах отсчета K_1 и K_2 можно выразить через начальные скорости $\vec{\upsilon}_{1\text{н}} = \vec{p}_{1\text{н}} / m$ и $\vec{\upsilon}_{2\text{н}} = \vec{p}_{2\text{н}} / m$ ЦМ C при $t = 0$:

$$\omega_{12} = \upsilon_{1\text{н}} / r_{1C} = \upsilon_1 / R;\ \omega_{21} = \upsilon_{2\text{н}} / r_{2C} = \upsilon_2 / R, \qquad (14)$$

где υ_1 и υ_2 – скорости тел m_1 и m_2 до начала взаимодействия; $R = r_{12} = r_{21}$ и радиусы r_{1C} и r_{2C} поступательно-вращательного движения тел m_1 и m_2 в системах отсчета K_1 и K_2, которые можно определить, используя известные уравнения $m_1\vec{r}_{1C} + m_2\vec{r}_{2C} = 0$ и $\vec{r}_{21} = \vec{r}_{2C} - \vec{r}_{1C}$ [2, 5], в виде:

$$\vec{r}_{1C} = -m_2\vec{r}_{21} / m;\ \vec{r}_{2C} = m_1\vec{r}_{21} / m. \qquad (15)$$

Угловая скорость $\omega_C = \omega_{1C} = \omega_{2C}$ тел m_1 и m_2 в системе отсчета K_C определяется суммой (обоснование дано в следующем разделе) относительных угловых скоростей ω_{12} и ω_{21} (14), и с учетом того, что $m_1\upsilon_1 = m_2\upsilon_2$, может быть представлена как

$$\omega_C = \omega_{12} + \omega_{21} = \upsilon_1 / R + \upsilon_2 / R = \begin{cases} \dfrac{m\upsilon_1}{m_2 R} \text{при } m_2 \geq m_1; \\ \dfrac{m\upsilon_2}{m_1 R} \text{при } m_1 \geq m_2. \end{cases} \qquad (16)$$

Относительность времени

Для жесткого соединения тел m_1 и m_2 стержнем R МС2 можно рассматривать как твердое тело. В этом случае угловые скорости плоского движения этих тел относительно начала C, O_1 и O_2 координат систем отсчета K_C, K_1 и K_2 (полюсов) являются инвариантами [2]

$$\omega_C = \omega_{12} = \omega_{21}, \qquad (17)$$

где $\omega_C = \omega_{1C} = \omega_{2C}$ – угловая скорость вращательного движения тел m_1 и m_2 относительно полюса C; $\vec{\omega}_{12}$ и $\vec{\omega}_{21}$ – угловые скорости вращательного движения этих тел относительно полюсов O_1 и O_2 (первый индекс угловой скорости указывает на номер тела, а второй – на номер полюса).

Для обеспечения инвариантности угловых скоростей (17) время t во всех системах отсчета K, K_C, K_1 и K_2 должно быть абсолютным, для которого угловые перемещения $\Delta\varphi$ тел m_1 и m_2 во всех выбранных системах отсчета также являются инвариантами

$$\Delta\varphi = \omega_C t = \omega_{12} t = \omega_{21} t, \tag{18}$$

где за начало отсчета времени принято время $t = t_1 = t_2 = 0$. Нарушение инвариантности угловых перемещений (18) эквивалентно разрушению твердого тела, что недопустимо, исходя из реальности его физического существования.

В рассматриваемом случае тела m_1 и m_2 закреплены на концах стержня R с помощью идеальных шарниров, в результате чего эти тела вместе с системами отсчета K_2 и K_1 совершают в системе отсчета K переносное движение с импульсами $\vec{p}_{1e} = \vec{p}_{2C}$ и $\vec{p}_{2e} = \vec{p}_{1C}$, а также относительное движение в этих системах отсчета K_2 и K_1 с импульсами $\vec{p}_{12}$, $\vec{p}_{21}$, т. е. совершают сложное поступательно-вращательное движение (см. рис. 2, *а*, где оси координат x систем отсчета K, K_C, K_1 и K_2 всегда параллельны).

Установим связь угловой скорости $\omega_C = \omega_{1C} = \omega_{2C}$ тел m_1 и m_2 в системе отсчета K_C с их относительными угловыми скоростями ω_{12r} и ω_{21r} в системах отсчета K_2 и K_1.

Запишем связь $\vec{p}_{12} = -\vec{p}_{21}$ (11) между относительными импульсами в криволинейных координатах

$$m_1\omega_{12}R = m_2\omega_{21}R. \tag{19}$$

Из (19) и (15) следует

$$r_{1C} / r_{2C} = m_2/m_1 = \omega_{12}/\omega_{21}. \tag{20}$$

Также в криволинейных координатах запишем связь $\vec{p}_{1e} = -\vec{p}_{21}$; $\vec{p}_{2e} = -\vec{p}_{12}$ (11) переносных и относительных импульсов

$$m_1\omega_{1C}r_{1C} = m_2\omega_{21}R;\ m_2\omega_C r_{2C} = m_1\omega_{12}R. \tag{21}$$

Из (21) с учетом (15) следует

$$\omega_{12} = m_2\omega_C / m;\ \omega_{21} = m_1\omega_C / m. \tag{22}$$

Суммирование правых и левых частей преобразований (22) дает выражение (16)

$$\omega_C = \omega_{12} + \omega_{21}. \tag{23}$$

Преобразования (20), (22) и выражение для абсолютной угловой скорости ω_C (23) известны из работы [2], где они записаны для вращательного движения твердого тела (m_1 или m_2) относительно параллельных осей (осей координат y систем отсчета K_C, K_1 и K_2) в одинаковых направлениях (см. рис. 2, *а*, где оси координат y перпендикулярны плоскости чертежа).

Так как $\omega_C \neq \omega_{12} \neq \omega_{21}$, для сохранения инвариантности угловых перемещений (18), исключающей возможность разрушения стержня R, необходимо, чтобы собственное время t_1 и t_2 в системах отсчета K_1 и K_2 по отношению к времени t_C в системе отсчета K_C протекало поразному

$$\Delta\varphi = \omega_C t_C = \omega_{12} t_2 = \omega_{21} t_1, \tag{24}$$

тогда как время t в лабораторной системе отсчета K и в системе отсчета K_C (неподвижной при $p_{1\text{ун}} + p_{2\text{ун}} = 0$ для диаметрального распределения $\theta_C = -\pi$ (12)) является абсолютным $t_C = t$.

Угловой инвариант (24) характеризует то, что для любого углового перемещения $\Delta\varphi$ тела m_1 в системах отсчета K_C и K_2, а также тела m_2 в системах отсчета K_C и K_1, каждое из этих тел m_1 и m_2 находится в одной и той же точке траектории $s_{1,2}$ (общей для $m_1 = m_2$) в системе отсчета K как, например, для тела m_2 при $\Delta\varphi = 0$ и $\pi / 2$ показано на рис. 2, *б* событиями e_1 и e_2, что выполняется при

$$\vec{\upsilon}_{12} = \vec{\upsilon}_{1C}; \vec{\upsilon}_{21} = \vec{\upsilon}_{2C}. \tag{25}$$

Применение преобразований (22) к инварианту (24) определяет собственное время t_1 и t_2 в системах отсчета K_1 и K_2:

$$t_1 = mt_C / m_1; t_2 = mt_C / m_2. \tag{26}$$

Из (26) следует, что в системе отсчета опорного тела m_1 при $m_1 \to \infty$ время $t_1 \to t_C$. Время t в лабораторной системе отсчета K и системе отсчета K_C (неподвижной при $p_{1\text{ун}} + p_{2\text{ун}} = 0$) абсолютно $t_C = t$.

Таким образом, введение собственного времени t_1 и t_2 в системах отсчета K_1 и K_2 сохраняет инвариантность угловых перемещений $\Delta\varphi$ (24) МС2 во времени с $N = 5$ степенями свободы во всех выбранных системах отсчета K_C, K_1, K_2.

С учетом относительности времени (26) представим связь переносных $\vec{p}_{1C}$, $\vec{p}_{2C}$ и относительных $\vec{p}_{12}$, $d\vec{p}_{21}$ импульсов (11) в дифференциальной форме:

$$\begin{gathered} d\vec{p}_{1C} / dt = -d\vec{p}_{21} / dt_1; d\vec{p}_{2C} / dt = -d\vec{p}_{12} / dt_2; \\ d\vec{p}_{1C} / dt = -d\vec{p}_{2C} / dt; d\vec{p}_{12} / dt_2 = -d\vec{p}_{21} / dt_1. \end{gathered} \tag{27}$$

Таким образом, *«время в собственных системах отсчета K_1 и K_2 взаимодействующих тел m_1 и m_2 по отношению ко времени в системе отсчета K_C центра масс C этих тел протекает по-разному и зависит от масс этих тел; время в неподвижной системе отсчета K_C центра масс C этих тел при их диаметральном распределении по отношению ко времени в инерциальной лабораторной системе отсчета K абсолютно»*.

Аксиома связи для сил инерции двух взаимодействующих тел и принцип Д'Аламбера

Фазовое перераспределение переносных импульсов $d\vec{p}_{1C} / dt = -d\vec{p}_{2C} / dt$ (27) тел m_1 и m_2 в системе отсчета K, определяющих их собственные силы инерции $\vec{\Phi}_{1C} = -d\vec{p}_{1C} / dt$ и $\vec{\Phi}_{2C} = d\vec{p}_{2C} / dt$ переносного движения (см. рис. 2, *а*), вызвано тем, что на тело m_1 через стержень R действует компонента $\vec{\Phi}^n_{21}$ относительной силы инерции $\vec{\Phi}_{21} = \vec{\Phi}^n_{21} + \vec{\Phi}^\tau_{21} = dp_{21}/dt_1$ тела m_2. Аналогично на тело m_2 в системе отсчета K через этот же стержень R действует компонента $\vec{\Phi}_{12}^{n}$ относительной силы инерции $\vec{\Phi}_{12}=\vec{\Phi}_{12}^{n}+\vec{\Phi}_{12}^{\tau}=-dp_{12}/dt_2$ тела m_1 так, что реакции стержня R для этих двух случаев определены равенствами $\vec{T}_{12}=\vec{\Phi}_{12}^{n}$ и $\vec{T}_{21}=\vec{\Phi}_{21}^{n}$.

Равенство тангенциальных компонент $\vec{\Phi}_{12}^{\tau}$ и $\vec{\Phi}_{21}^{\tau}$ относительных сил инерции $\vec{\Phi}_{12}$ и $\vec{\Phi}_{21}$ нулю $\vec{\Phi}_{12}^{\tau}=\vec{\Phi}_{21}^{\tau}=0$ вызвано тем, что для начальных импульсов $p_{1ун}+p_{2ун}=0$ время перехода МС2 в стационарное состояние с диаметральным распределением $\theta_C=-\pi$ (12) ее тел m_1 и m_2 можно считать мгновенным $t=dt\to 0$, а ее движение – всегда удовлетворяющим принципу наименьшего действия [2, 5]. При удовлетворении МС2 этому принципу поступательно-вращательное движение тел m_1 и m_2 в системах отсчета K_C, K_1 и K_2 будет равномерным $\omega_{1C}=\omega_{1C}=\omega_{1C},\omega_{12},\omega_{21}=\mathrm{const}$ и, следовательно, тангенциальные компоненты $\vec{\Phi}_{12}^{\tau}$ и $\vec{\Phi}_{21}^{\tau}$ будут равны нулю $\vec{\Phi}_{12}^{\tau}=\vec{\Phi}_{21}^{\tau}=0$ (см. рис. 2, *а*). При этом нормальные компоненты $\vec{\Phi}_{12}^{n}$ и $\vec{\Phi}_{21}^{n}$ всегда направлены вдоль стержня R и влияют на противофазное перераспределение фаз φ_{1C} и φ_{2C} переносных импульсов $\vec{p}_{1C}=m_1\vec{\upsilon}_{1C}$ и $\vec{p}_{2C}=m_1\vec{\upsilon}_{2C}$ между телами m_1 и m_2, а тангенциальные $\vec{\Phi}_{12}^{\tau}$ и $\vec{\Phi}_{21}^{\tau}$ (в случае длительного переходного процесса $t=dt>>0$) – на амплитудное p_{1C} и p_{2C} перераспределение этих импульсов $\vec{p}_{1C}$ и $\vec{p}_{2C}$.

Равенство реакций $\vec{T}_{12}$ и $\vec{T}_{21}$ стержня R и относительных сил инерции $\vec{T}_{12}=\vec{\Phi}_{12}$ и $\vec{T}_{21}=\vec{\Phi}_{21}$ позволяет распространить аксиому связи R двух взаимодействующих тел m_1 и m_2 на их относительные силы инерции $\vec{\Phi}_{12}$ и $\vec{\Phi}_{21}$: *«Относительные силы инерции $\vec{\Phi}_{12}$ и $\vec{\Phi}_{21}$ двух взаимодействующих тел m_1 и m_2 взаимно приложены к этим телам и действуют на них через их связь, которую можно условно отбросить, а ее реакции $\vec{T}_{12}$ и $\vec{T}_{21}$ заменить относительными силами инерции $\vec{T}_{12}=\vec{\Phi}_{12}$ и $\vec{T}_{21}=\vec{\Phi}_{21}$ этих тел».*

Дифференциальное перераспределение переносных и относительных импульсов $d\vec{p}_{1C}/dt=-d\vec{p}_{21}/dt_1$ и $d\vec{p}_{2C}/dt=-d\vec{p}_{12}/dt_2$ (27) можно представить в системе отсчета K в виде принципа Д'Аламбера:

$$\vec{\Phi}_{1C}+\vec{\Phi}_{21}=0;\ \vec{\Phi}_{2C}+\vec{\Phi}_{12}=0. \tag{28}$$

Почленное суммирование уравнений (28) с учетом того, что тангенциальные компоненты $\vec{\Phi}_{12}^{\tau}$, $\vec{\Phi}_{21}^{\tau}$ и сумма радиальных компонентов $\vec{\Phi}_{21}^{n},\vec{\Phi}_{12}^{n}$ одновременно равны нулю $\vec{\Phi}_{21}^{\tau}=\vec{\Phi}_{12}^{\tau}=0$ и $\vec{\Phi}_{21}^{n}+\vec{\Phi}_{12}^{n}=0$, позволяет выразить сохранность импульса и кинетического момента МС2 в центральном поле относительных сил инерции в компонентной форме:

$$d\vec{p}_C/dt=\vec{\Phi}_{21}^{n}+\vec{\Phi}_{12}^{n}=0;\ d\vec{K}_C/dt=0. \tag{29}$$

Проверим удовлетворение введенной аксиомы связи для сил инерции и преобразований (22) принципу Д'Аламбера (28). Для этого выразим силы инерции этого принципа в криволинейных координатах:

$$\vec{\Phi}_{1C}=m_1\vec{a}_{1C};\ \vec{\Phi}_{2C}=m_2\vec{a}_{2C};\ \vec{\Phi}_{12}=m_1\vec{a}_{12};\ \vec{\Phi}_{21}=m_2\vec{a}_{21}, \tag{30}$$

где $\vec{a}_{1C} = \omega_C^2 \vec{r}_{1C}$; $\vec{a}_{2C} = \omega_C^2 \vec{r}_{2C}$ и $\vec{a}_{12} = \omega_C \omega_{12} \vec{r}_{12}$; $\vec{a}_{21} = \omega_C \omega_{21} \vec{r}_{21}$ – переносные ускорения тел m_1 и m_1 в системе отсчета K_C и относительные ускорения этих тел в системе отсчета K от их переносного ω_C и относительных ω_{12} и ω_{21} движений.

Составляя принцип Д'Аламбера (28) в криволинейных координатах

$$m_1 \omega_C^2 r_{1C} = m_2 \omega_C \omega_{21} R; m_2 \omega_C^2 r_{2C} = m_1 \omega_C \omega_{12} R \tag{31}$$

и применяя к нему преобразования (22), получим известные радиусы (15)

$$r_{1C} = m_2 R / m; r_{2C} = m_1 R / m, \tag{32}$$

для которых совместно с преобразованиями (22) этот принцип удовлетворен.

Таким образом, введенная аксиома связи для сил инерции и преобразования (22) удовлетворяет принципу Д'Аламбера (28). Кроме того, преобразования (22) устанавливают связь между переносными $\vec{p}_{1e} = \vec{p}_{2C}$, $\vec{p}_{2e} = \vec{p}_{1C}$ и относительными $\vec{p}_{12}$, $\vec{p}_{12}$ импульсами (11), удовлетворяющими сохранности импульса $\vec{p}_C = \overrightarrow{\text{const}}$ (7).

Взаимодействие тел m_1 и m_2 МС2 посредством стержня R (что также справедливо для их взаимодействия по закону Ньютона или Кулона) приводит к искривлению траекторий движения $s_{1,2}$, s_{12} и s_{21} этих тел (см. рис. 2, *а*). При этом каждое из тел оказывается вовлеченным в переносное и относительное движения $m_1 \vec{\upsilon}_{2C} \vec{\upsilon}_{12}$ и $m_2 \vec{\upsilon}_{1C} \vec{\upsilon}_{21}$, что формирует центральное поле относительных сил инерции $\vec{\Phi}_{12}$ и $\vec{\Phi}_{21}$, которое для диаметрального распределения $\theta_C = -\pi$ (12) образует уравновешенную систему сил $\vec{\Phi}_{21}^n + \vec{\Phi}_{12}^n = 0$ (29), так что суммарный импульс $\vec{p}_C$ МС2 сохраняется $d\vec{p}_C / dt = \text{const}$.

Согласно принципу эквивалентности гравитации и сил инерции по Энштейну [6], движение тел m_1 и m_2 по траекториям $s_{1,2}$ и s_{12}, s_{21} в виде окружностей можно рассматривать как движение по замкнутым геодезическим траекториям в динамическом гравитационном поле [7]. Введение термина «динамическое гравитационное» как эквивалента термину «центральное поле относительных сил инерции» позволяет исключить смешение понятий «движение по инерции» и «силы инерции» и их зависимость по Аристотелю.

Единица измерения динамического гравитационного определяется размерностью относительных сил инерции $\vec{\Phi}_{12}$ и $\vec{\Phi}_{21}$ (30) взаимодействующих тел m_1 и m_2, совершающих сложное движение $m_1 \vec{\upsilon}_{2C} \vec{\upsilon}_{12}$ и $m_2 \vec{\upsilon}_{1C} \vec{\upsilon}_{21}$ по Кориолису.

Энергетический анализ

С учетом выражения для абсолютных скоростей $\vec{\upsilon}_1$ и $\vec{\upsilon}_2$ (8) суммарную энергию E МС2 и ее лагранжиан L выразим в виде

$$\left.\begin{matrix} E(+) \\ L(-) \end{matrix}\right\} = \frac{1}{2} m_1 \vec{\upsilon}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \vec{\upsilon}_2^2 + U(R) = \frac{1}{2} m_1 \vec{\upsilon}_{2C}^2 + \frac{1}{2} m_2 \vec{\upsilon}_{1C}^2 + \frac{1}{2} m_1 \vec{\upsilon}_{12}^2 + \frac{1}{2} m_2 \vec{\upsilon}_{21}^2 \pm U, \tag{33}$$

где U – обобщенный потенциал [5]

$$U = \left| m_1 \vec{\upsilon}_{2C} \vec{\upsilon}_{12} + m_2 \vec{\upsilon}_{1C} \vec{\upsilon}_{21} \right|, \tag{34}$$

учитывающий участие тел m_1 и m_2 в переносном $\vec{\upsilon}_{1e}=\vec{\upsilon}_{2C}, \vec{\upsilon}_{2e}=\vec{\upsilon}_{1C}$ и относительном $\vec{\upsilon}_{12r}, \vec{\upsilon}_{21r}$ движениях вследствие их взаимодействия со стержнем R.

Сумма первого и второго слагаемых $T_C=\frac{1}{2}m_1\vec{\upsilon}_{2C}^2+\frac{1}{2}m_2\vec{\upsilon}_{1C}^2$ (33) является кинетической энергией МС2 в системе отсчета K_C.

Сумма третьего и четвертого слагаемых $T_r=\frac{1}{2}m_1\vec{\upsilon}_{12}^2+\frac{1}{2}m_2\vec{\upsilon}_{21}^2$ является кинетической энергией относительного движения тела m_1 в системе отсчета K_2 и тела m_2 в системе отсчета K_1, а обобщенный потенциал U (34) представляет собой потенциальную функцию центрального динамического поля относительных сил инерции взаимодействующих тел m_1 и m_1 МС2, каждое из которых одновременно участвует в переносном и относительном движениях $m_1\vec{\upsilon}_{2C}\vec{\upsilon}_{12}$ и $m_2\vec{\upsilon}_{1C}\vec{\upsilon}_{21}$.

Преобразуя векторное произведение $\vec{\upsilon}_{2C}\vec{\upsilon}_{12}$ и $\vec{\upsilon}_{1C}\vec{\upsilon}_{21}$ к скалярному виду, представим обобщенный потенциал U (34) в виде

$$U=\left|m_1\upsilon_{2C}\upsilon_{12}\cos\varphi+m_2\upsilon_{1C}\upsilon_{21}\cos\varphi\right|=m_1\omega_C r_{2C}\omega_{12}r_{12}+m_2\omega_C r_{1C}\omega_{21}r_{21}, \qquad (35)$$

где φ – угол между векторами $\vec{\upsilon}_{2C}\hat{\vec{\upsilon}}_{12}=-\vec{\upsilon}_{12}\hat{\vec{\upsilon}}_{2C}$ и $\vec{\upsilon}_{1C}\hat{\vec{\upsilon}}_{21}=-\vec{\upsilon}_{21}\hat{\vec{\upsilon}}_{1C}$, который для диаметрального распределения $\theta_C=-\pi$ (12) можно определить в виде $\varphi=-\vec{\upsilon}_{12}\hat{\vec{\upsilon}}_{2C}=-\vec{\upsilon}_{21}\hat{\vec{\upsilon}}_{1C}=-\pi$. В таком представлении этот угол учитывает запаздывание фазы φ_{1C} движения тела m_1 в системе отсчета K_C относительно фазы φ_{21} движения тела m_2 в собственной системе отсчета K_1 тела m_1 и определяет это запаздывание (и аналогичное запаздывание тела m_2) в виде преобразований (13)

$$\varphi_{1C}=\varphi_{21}+\varphi=\varphi_{21}-\pi,\ \varphi_{2C}=\varphi_{12}+\varphi=\varphi_{12}-\pi. \qquad (36)$$

Частный дифференциал от обобщенного потенциала U (35) по радиусам r_1 и r_2 определяет относительные силы инерции тел m_1 и m_2 в системах отсчета K_2 и K_1

$$\vec{\Phi}_{12}=dU/dr_{2C}=-m_1\omega_C\omega_{12}\vec{r}_{12};\ \vec{\Phi}_{21}=dU/dr_{1C}=m_2\omega_C\omega_{21}\vec{r}_{21}, \qquad (37)$$

которые являются результатом участия этих тел в переносном и относительном движениях $m_1\vec{\upsilon}_{2C}\vec{\upsilon}_{12r}$ и $m_2\vec{\upsilon}_{1C}\vec{\upsilon}_{21r}$, где учтено, что $\vec{r}_{12}=-\vec{r}_{21}$.

Относительные силы инерции (37) удовлетворяют принципу Д'Аламбера (28) и при $\omega_C,\omega_{21}=\mathrm{const}$, когда $\vec{\Phi}_{21}^{\tau}=\vec{\Phi}_{12}^{\tau}=0$, удовлетворяют сохранности импульса МС2 в виде (29).

Исключение систем отсчета K_1 и K_2 из рассмотрения эквивалентно исключению пятой степени свободы МС2, сводящее ее к твердому телу (когда ее тела m_1 и m_2 жестко закреплены на стержне R). Покажем это, используя преобразования (22), которые обеспечивают переход к системе отсчета K_C, где относительные силы инерции $\vec{\Phi}_{12}$ и $\vec{\Phi}_{21}$ (37) тел m_1 и m_2 принимают классический вид:

$$\vec{\Phi}_{1C}=-\frac{m_1m_2}{m}\omega_C^2\vec{r}_{12}=-m_1\omega_C^2\vec{r}_{1C};\ \vec{\Phi}_{2C}=\frac{m_2m_1}{m}\omega_C^2\vec{r}_{21}=m_2\omega_C^2\vec{r}_{2C}, \qquad (38)$$

для равномерного вращательного движения этих тел относительно их ЦМ C в абсолютном времени $t_C = t$.

В системе отсчета K_C импульсы $\vec{p}_{1C}$ и $\vec{p}_{2C}$ тел m_1 и m_2 теряют смысл переносных, а суммарное действие центрального поля относительных сил инерции $\vec{\Phi}_{1C}$ и $\vec{\Phi}_{1C}$ (38) для диаметрального распределения $\theta_C = -\pi$ (12) этих тел обращается в нуль

$$\vec{\Phi}_{1C} + \vec{\Phi}_{2C} = 0, \tag{39}$$

в результате чего импульс $d\vec{p}_C$ рассматриваемой замкнутой МС2 сохраняется $d\vec{p}_C = \overrightarrow{\mathrm{const}}$ (29).

Численное моделирование показало, что лагранжиан L (33) рассматриваемой МС2 находится в минимуме $L = T_C + T_r - U = 0 \Rightarrow \min$. Это характеризует то, что движение МС2 удовлетворяет принципу наименьшего действия [2, 5], а ее тела m_1 и m_2 во всех системах отсчета K, K_C, K_1 и K_2 совершают движение по геодезическим траекториям $s_{1,2}$, s_{12} и s_{21}.

Второй закон Ньютона для относительных сил инерции

Запишем принцип Д' Аламбера (28) в системе отсчета K в виде второго закона Ньютона в дифференциальной форме отдельно для каждого из тел m_1 и m_2:

$$d\vec{p}_{1C} / dt = \vec{\Phi}_{21};\ d\vec{p}_{2C} / dt = \vec{\Phi}_{12}, \tag{40}$$

где $d\vec{p}_{1C} / dt = -\vec{\Phi}_{1C}$ и $d\vec{p}_{2C} / dt = -\vec{\Phi}_{2C}$ – силы инерции переносного движения тел m_1 и m_2 в системе отсчета K; $\vec{\Phi}_{12} = -d\vec{p}_{12} / dt_1$ и $\vec{\Phi}_{21} = -d\vec{p}_{21} / dt_1$ – относительные силы инерции тел m_1 и m_2 в системах отсчета K_2 и K_1.

Для отыскания частного решения уравнений (40), например, первого в системе отсчета K_C, определим положение и скорость тел m_1 и m_2 по координате x в системах отсчета K_C и K_1:

$$\begin{gathered} x_{1C} = r_{1C}\cos\varphi_{1C}; x_{21} = R\cos\varphi_{21}; \\ \dot{x}_{1C} = dx_{1C} / dt = -r_{1C}\omega_C \sin\varphi_{1C}; \dot{x}_{21} = dx_{21} / dt_1 = -R\omega_{21}\sin\varphi_{21}, \end{gathered} \tag{41}$$

где r_{1C} – радиус поступательно-вращательного движения тела m_1 в системе отсчета K_C (см. рис. 2, *а*), определяющийся выражениями (15); $\varphi_{1C} = \omega_C t$ и $\varphi_{21} = \omega_{21} t_1$ (24) – угловые перемещения тел m_1 и m_2 в системах отсчета K_C и K_1, записанные соответственно для времени $t = t_C$ и t_1 этих систем отсчета.

С учетом скоростей (41) и преобразований (13) выразим импульсы тел m_1 и m_2 в системах отсчета K_C и K_1:

$$p_{1Cx} = -m_1 r_{1C}\omega_C \sin\varphi_{1C};\ p_{21x} = -m_2 R\omega_{21}\sin\varphi_{21} = m_2 R\omega_{21}\sin\varphi_{1C}, \tag{42}$$

рассматривая поступательно-вращательное движение этих тел как гармоническое колебание относительно центра масс C.

Тогда, исходя из связи $\vec{p}_{1e} = -\vec{p}_{21r}$ (11) переносного импульса и относительного импульсов, можно записать

$$\vec{p}_{1Cx} + \vec{p}_{21x} = 0. \tag{43}$$

Из (43) с учетом (42) найдем амплитуды:

$$A_1 = c_1\omega_{21r} / \omega_C, A_2 = c_2\omega_{12r} / \omega_C, \tag{44}$$

где $c_1 = m_2R / m_1$ и $c_2 = m_1R / m_2$ – некоторые амплитудные коэффициенты; амплитуда A_2 приведена без представления аналогичного решения для второго уравнения (40).

Преобразования (22) сводят амплитуды (44) к радиусам (15), широко известным в механике [2, 5]:

$$A_1 = r_{1C} = m_2R / m; A_2 = r_{2C} = m_1R / m. \tag{45}$$

По амплитудам (45) с учетом того, что $\varphi_{12} = -\varphi_{21}$, нетрудно выразить решение уравнений (40) в системе отсчета K_C:

$$\begin{aligned} &x_{1C} = -A_1\cos\varphi_{21};\ y_{1C} = -A_1\sin\varphi_{21}; \\ &x_{2C} = -A_2\cos\varphi_{12} = A_2\cos\varphi_{21};\ y_{2C} = -A_2\sin\varphi_{12} = A_2\sin\varphi_{21}, \end{aligned} \tag{46}$$

которые выражены как функции от инвариантных угловых перемещений $\varphi_{12} = -\omega_C t = -\omega_{12}t_1$ и $\varphi_{21} = \omega_C t = \omega_{21}t_1$ (24).

Если сумма абсолютных импульсов тел m_1 и m_2 до начала их взаимодействия при $t = 0$ не равна нулю $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 \neq 0$ (см. рис. 1), то скорость ЦМ C замкнутой МС2 при $t > 0$ в соответствии с (5) составляет

$$\vec{\upsilon}_C = (\vec{p}_1 + \vec{p}_2) / m \neq 0. \tag{47}$$

Тогда решения первого уравнения (40) с учетом (46) в системе отсчета K для $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 \neq 0$ при $t > 0$ можно представить в виде:

$$\begin{aligned} &x_1 = x_{C\text{н}} - A_1\cos\varphi_{21};\ y_1 = y_{C\text{н}} - A_1\sin\varphi_{21}; \\ &\dot{x}_1 = \upsilon_{Cx} + A_1\omega_{21}\sin\varphi_{21};\ \dot{y}_1 = \upsilon_{Cy} + A_1\omega_{21}\cos\varphi_{21}; \end{aligned} \tag{48}$$

где $x_{C\text{н}}$ и $y_{C\text{н}}$ – начальные координаты ЦМ в системе отсчета K в момент времени $t = 0$; υ_{Cx} и υ_{Cy} – скорости ЦМ C (47) на оси координат x и y системы отсчета K; $\varphi_{21} = \omega_C t = \omega_{21}t_1$ – угловое перемещение, производная от которого $\omega_{21} = d\varphi_{21} / dt_1$ ищется по времени t_1.

На практике необходимость в использовании решения второго уравнения (40) относительно x_{2C} и y_{2C} (46) отсутствует, так как координаты тела m_2, его траекторию движения и скорость можно определить непосредственно по координатам тела m_1 с помощью известных преобразований координат: $x_{2C} = x_{1C} + R\cos\varphi_{21}$ и $y_{2C} = y_{1C} + R\sin\varphi_{21}$.

Таким образом, решения (46) являются частными решениями неоднородных дифференциальных уравнений (40) в системе отсчета K_C. Тела m_1 и m_2 при $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 \neq 0$ и $t > 0$ будут двигаться в системе отсчета K по спиральным траекториям, что следует из (48).

Сведение задачи двух тел к задаче одного тела

Переход к задаче одного тела можно выполнить в случае, когда МС2 имеет число степеней свободы $N \leq 3$ [3]. Предположим, что тело m_2 рассматриваемой МС2 (см. рис. 2, *а*) жестко закреплено на стержне R. В этом случае его собственную систему отсчета K_2 можно исключить из рассмотрения, поскольку в ней относительная угловая скорость ω_{12} тела m_1 равна нулю: $\omega_{12} = 0$. Тогда из (23) следует равенство угловых скоростей

$$\omega_{21} = \omega_C \tag{49}$$

и одновременно из инварианта (24) то, что время в системах отсчета K, K_C и K_1 абсолютно:

$$t_1 = t_C = t\,. \tag{50}$$

Введем декартовы обобщенные координаты x_1, y_1 и x_2, y_2 тел m_1 и m_2 в системе отсчета K, а также полярную обобщенную координату $\varphi_{21} = \omega_{21} t$ тела m_2 в системе отсчета K_1, где ω_{21} – угловая скорость вращательного движения тела m_2 относительно опорного тела m_1. Тогда кинетическую энергию T МС2 с числом степеней свободы $N = 3$ в системе отсчета K можно выразить в виде

$$T = \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2)\,, \tag{51}$$

где скорости $\dot{x}_1$, $\dot{y}_1$ и $\dot{x}_2$, $\dot{y}_2$ тел m_1 и m_2 можно определить через их координаты:

$$\begin{aligned} &x_1 = x_1;\, x_2 = x_1 + R\cos\varphi_{21};\, \dot{x}_1 = \dot{x}_1;\, \dot{x}_2 = \dot{x}_1 - R\omega_{21}\sin\varphi_{21};\\ &y_1 = y_1;\, y_2 = y_1 + R\sin\varphi_{21};\, \dot{y}_1 = \dot{y}_1;\, \dot{y}_2 = \dot{y}_1 + R\omega_{21}\cos\varphi_{21}. \end{aligned} \tag{52}$$

Подстановка скоростей (52) в кинетическую энергию T (51) при $\omega_{21} = \text{const}$ дает лагранжиан рассматриваемой МС2 в виде

$$L = T = \frac{1}{2} m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \omega_{21}^2 R^2 - U\,, \tag{53}$$

где $m = m_1 + m_2$ – суммарная масса МС2, условно сосредоточенная в рабочем теле m_1 (см. рис. 1 и [3]); U – обобщенный потенциал [5]:

$$U = m_2 \omega_{21} R (\dot{x}_1 \sin\varphi_{21} - \dot{y}_1 \cos\varphi_{21})\,. \tag{54}$$

На основе лагранжиана L (53) можно получить два координатных уравнения:

$$m\ddot{x}_1 = m_2 \omega_{21}^2 R\cos\varphi_{21};\; m\ddot{y}_1 = m_2 \omega_{21}^2 R\sin\varphi_{21}\,, \tag{55}$$

которые можно представить в виде второго закона Ньютона в дифференциальной форме

$$m d\vec{\dot{r}}_1 / dt = \vec{\Phi}_{21}\,. \tag{56}$$

Так как для начальных условий $p_{1\text{ун}} + p_{2\text{ун}} = 0$ переходный процесс МС2 отсутствует, то решениями уравнений (56) являются частные решения (46). В работе [3] найдено решение уравнения (56) в системе отсчета K с учетом влияния на опорное тело m_1 диссипативной силы

$\vec{F}_1 = \mu_1 \vec{\upsilon}_1$ с вязким линейным сопротивлением μ_1 его движению со скоростью $\vec{\upsilon}_1$. При опускании в частном решении (46) координат x_{2C} и y_{2C} число степеней свободы МС2 уменьшится до $N = 1$.

Заключение

Показано, что движение двухмассовой механической системы с пятью степенями свободы совершается в центральном поле относительных сил инерции ее взаимодействующих тел, которое отождествлено с динамическим гравитационным полем, что определяет единицу его измерения в размерности сил инерции ее взаимодействующих тел. На основе аксиомы связи, примененной для сил инерции ее взаимодействующих тел и принципа Д' Аламбера, записано уравнение движения каждого ее тел в форме второго закона Ньютона в абсолютном пространстве. Установлена связь абсолютного, переносного и относительного движений во времени. Введение в рассмотрение центрального силового поля относительных сил инерции в зависимости от начальных условий допускает возможность движения взаимодействующих тел механической системы относительно силового центра этого поля совместно с ее центром масс при радиальном распределении $\theta_O \neq \pi$ [7] ее тел. Для такого случая сохранение импульса замкнутой механической системы должно выражаться как циркуляция вектора ее импульса по замкнутому контуру в виде геодезической траектории. Влияние центрального поля относительных сил инерции, с одной стороны, указывает на несостоятельность работы «Инерция» автора Н. В. Гулиа [1], противоречащей эксперименту [8–11], а с другой – отрицает возможность направленного безопорного движения по работе В. Н. Толчина [10] и работам других авторов [12, 13], так как движение замкнутой механической системы всегда происходит по замкнутым геодезическим траекториям.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Гулиа Н. В. Инерция: [Предисловие А. Ю. Ишлинского]. – М. : Наука., 1982. – 152 с. – Сер. Наука и техн. прогресс.

2. Никитин Н. Н. Курс теоретической механики. – М. : Высшая школа, 1990. – 607 с.

3. Савелькаев С. В. Динамический анализ двухмассовой механической системы в диссипативной среде с учетом сил инерции // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. – 2024. – № 87. – С. 135–149. – DOI 10.17223/19988621/87/11. – EDN CNQMTQ.

4. Савелькаев С. В. Влияние сил инерции взаимодействующих тел механической системы на ее движение в диссипативной среде и особенности движения // Вестник СГУГиТ. – 2022. – Т. 27, № 5. – С. 183–202. – DOI 10.33764/2411-1759-2022-27-5-183-202. – EDN QUYIWA.

5. Савельев И. В. Основы теоретической физики. Механика и электродинамика. В 2-х т. Т. 1. – М. : Наука, 1991. – 496 с.

6. Эйнштейн А. О специальной и общей теории относительности. Т. 1. // Собр. науч. тр. в 4-х т. – М. : Наука, 1965. – 563 с.

7. Савелькаев С. В. Теория гравитации. – М. : МЭИ, 1993. – 106 с.

8. Савелькаев С. В. Механика. Корреляционная механика механических систем : препринт. – Новосибирск : СГГА, 2013. – 67 с.

9. Савелькаев С. В. Динамический анализ трехмассовой механической системы в диссипативной среде с учетом сил инерции // Научно-исследовательский центр «Машиностроение» (НИЦ МС). Материалы VIII Международной научно-практической конференции «Мехатроника, автоматика и робототехника», 13 марта, г. Санкт-Петербург. – ФОМ. – 2024. – Т. 13. – С. 5–13. – DOI 10.26160/2542-0127-2024-13-5-13.

10. Толчин В. Н. Инерциоид. Силы инерции как источник поступательного движения. – Пермь : Кн. Изд., 1977. – С. 89, 90.

11. Савелькаев С. В. Эффект независимости величины смещения центра масс механической системы от диссипативности внешней среды // Механика машин, механизмов и материалов. – 2011. – № 4 (17). – С. 42–48.
12. Шипов Г. И. Теория физического вакуума. – М. : НТ-Центр, 1993. – 362 с.
13. Иванов Н. И. Ритмодинамика. – М. : Энергия, 2007. – 221 с.

Об авторе

Сергей Викторович Савелькаев – доктор технических наук, доцент, профессор кафедры специальных устройств, инноватики и метрологии.

Получено 05.11.2024

Dynamic gravity as an equivalent of inertia in mechanics and its unit of measurement

S. V. Savel'kaev[1]✉

[1]Siberian State University of Geosystems and Technologies, Novosibirsk, Russian Federation

e-mail: sergei.savelkaev@yandex.ru

Abstract. The paper presents a dynamic analysis of a mechanical system consisting of two interacting bodies connected by a rectilinear rigid rod whose ends are fixed to these bodies by means of ideal hinges. The mechanical system has five degrees of freedom. Its bodies perform a complex translational-rotational motion along trajectories in the form of circles with a diametrical distribution relative to their center of mass and relative to each other. Based on the axiom of constraints applied to the inertial forces of the interacting bodies of this mechanical system and D'Alembert's principle, it is shown that the motion of its bodies occurs in the central field of their relative inertial forces. It is shown that time in the proper reference frames of the bodies relative to the time in the reference frame of their center of mass proceeds differently and depends on the masses of these bodies. Time in a fixed reference frame and in the reference frame of the center of mass of the bodies with their diametrical distribution is absolute. Based on the principle of equivalence of gravity and inertia, the central field of relative inertial forces is identified with the dynamic gravitational field, which determines the unit of its measurement.

Keywords: two-mass mechanical system, momentum, relativity of time, dynamic gravitational field

REFERENCES

1. Gulia, N. V. (1982). Inertia. *Moscow: Science. Series Science and Technical Progress*. 152 p. [in Russian].
2. Nikitin, N. N. (1990). *Kurs teoreticheskoy mekhaniki [Course of Theoretical Mechanics]*. M.: Higher. Shk. 607 p. [in Russian].
3. Savel'kaev, S. V. (2024). Dynamic analysis of a two-mass mechanical system in a dissipative medium taking into account inertial forces *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika. [Vestnik of Tomsk State University. Mathematics and mechanics]*. No. 87. pp. 135–149. DOI 10.17223/19988621/87/11. EDN CNQMTQ [in Russian].
4. Savel'kaev, S. V. (2022). Influence of inertial forces of interacting bodies of a mechanical system on its motion in a dissipative medium and motion features *Vestnik SGUGiT [Vestnik SGUGT],* Vol. 27, No. 5. pp. 183–202. DOI 10.33764/2411-1759-2022-27-5-183-202. EDN QUYIWA [in Russian].

5. Savelyev, I. V. (1991). *Osnovy teoretitseskoy fiziki. Mekhanika i elektrodinamika [Fundamentals of Theoretical Physics. Mechanics and electrodynamics]*. M. : Nauka. Vol. 1. 496 p. [in Russian].

6. Einstein, A. (1965). *O spetsial'noy i obshchey teorii otnositel'nosti [On the special and general theory of relativity].* M. : Nauka. Vol. 1. 563 p. [in Russian].

7. Savel’kaev, S. V (1993) *Teoriy gravitachii [Theory of gravity].* M. : Moscow Energy Institute. 106 p. [in Russian].

8. Savel’kaev, S. V. (2013) *Mekhanika. Korelyatsionnaya mekhanika mekhanicheskikh system: preprint [Mechanics. Correlation mechanics of mechanical systems: preprint].* Novosibirsk: SGGA. 67 p. [in Russian].

9. Savel'kaev, S. V. (2024). Dynamic analysis of a three-mass mechanical system in a dissipative medium taking into account inertial forces. *Nauchno-issledovatel'skiy tsentr «Mashinostroyeniye» (NITS MS). Materialy VIII mezhdunarodnoy nauchno-prakticheskoy konferentsii Mekhatronika, avtomatika i robototekhnika (FOM-24-13), 13 marta, g. Sankt-Peterburg. [Research Center "Mechanical Engineering" (R&D Center MS). Proceedings of the VIII International Scientific and Practical Conference Mechatronics, Automation and Robotics (FOM-24-13), March 13, St. Petersburg],* Vol. 13.P. 5–13. DOI 10.26160/2542-0127-2024-13-5-13.

10. Tolchin, V. N. (1977). *Inertsioid. Sili inertsii kak istochnik postypatel’nogo dvijeniya [Forces of inertia as a source of translational motion].* Perm: Book. Ed. p. 89, 90 [in Russian].

11. Savel’kaev, S. V. (2011). *Effekt nezavisimosti velichiny smechchtniya tsentra mass mekhanicheskoi sistemy ot dissipativnosti vnechchney sredy [The effect of independence of the displacement of the center of mass of a mechanical system from the dissipativity of the external environment].* Mechanics of machines, mechanisms and materials. Minsk: United Institute of Mechanical Engineering of the National Academy of Sciences of Belarus. 4 (17). 42–48 [in Russian].

12. Shipov, G. I. (1993). *Teoriya fizicheskogo vacuuma [Theory of Physical Vacuum]* M. : NT-Center. 362 p. [in Russian].

13. Ivanov, N. I. (2007) Rhythmodynamics. M. : Publishing and Analytical Center "Energy". 221 p. [in Russian].

Author details

Sergei V. Savel’kaev – D. Sc., Associate Professor, Professor of the Department of Special Devices, Innovation and Metrology.

Received 05.11.2024