

# ГЕОДЕЗИЯ И МАРКШЕЙДЕРИЯ

УДК 528.063:528.236.5

DOI: 10.33764/2411-1759-2021-26-5-5-16

## АЛГОРИТМЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ВЫСОТ И ШИРОТ ПУНКТОВ ПО ПРЯМОУГОЛЬНЫМ КООРДИНАТАМ В ПЛОСКОСТИ МЕРИДИАННОГО ЭЛЛИПСА

*Александр Викторович Елагин*

Сибирский государственный университет геосистем и технологий, 630108, Россия, г. Новосибирск, ул. Плахотного, 10, кандидат технических наук, доцент кафедры космической и физической геодезии, тел. (383)361-01-59, e-mail: kaf.astronomy@ssga.ru

*Наталья Николаевна Кобелева*

Сибирский государственный университет геосистем и технологий, 630108, Россия, г. Новосибирск, ул. Плахотного, 10, кандидат технических наук, доцент кафедры космической и физической геодезии, тел. (383)361-01-59, e-mail: n.n.kobeleva@mail.ru

В связи с широким применением ГНСС-технологий в геодезической практике возникает задача перехода от прямоугольных пространственных координат точек к пространственным геодезическим координатам, которые необходимы для перехода к плоским прямоугольным координатам в проекции Гаусса – Крюгера. Авторами предложены пять алгоритмов преобразования прямоугольных координат пунктов в плоскости меридианного эллипса в геодезические высоты и широты. Первые два алгоритма связаны геометрическими соотношениями точки пересечения эллипса с нормалью, проходящей через пункт, в котором были получены прямоугольные пространственные координаты. В основе формул других трех алгоритмов лежат геометрические соотношения точки пересечения меридианного эллипса с прямой, соединяющей пункт с центром кривизны меридиана. В результате экспериментов получены отклонения вычисленных широт и высот от эталонных значений заданной сетки геодезических координат. Формулы тестировались не только для пунктов под земной поверхностью и на ней, но и вне Земли на разных высотах вплоть до высоты 20 000 км.

**Ключевые слова:** меридианный эллипс, геодезические высоты и широты, прямоугольные координаты меридианного эллипса, нормаль, центр кривизны меридиана, алгебраические уравнения четвертой степени, радиус-вектор

### *Введение*

В настоящее время в научной литературе и учебниках представлено более полутора десятков способов вычисления геодезических высот и широт пунктов по прямоугольным координатам [1–20]. Способы вычисления геодезических широт по пространственным прямоугольным координатам, выполненные путем использования дифференциальных поправок, описаны в [21, 22].

В данной работе экспериментально исследована точность и выполнено сравнение пяти

алгоритмов преобразования прямоугольных координат пунктов в системе координат меридианного эллипса в геодезические широты и высоты (по критериям точности и простоте формул). Известно, что формулы прямого перехода от геодезических широт и высот к прямоугольным координатам меридианного эллипса являются точными и имеют вид [2]

$$X = (N + H) \cos B ; \quad (1)$$

$$Y = (N + H - Ne^2) \sin B . \quad (2)$$

Путем изменения широт и высот ( $B = 15, 30, 45, 60, 75^\circ$ ;  $H = -1, 0, 1, 10, 100, 1\ 000, 10\ 000, 20\ 000$  км), по формулам (1) и (2) определяется сетка эталонных значений прямоугольных координат в плоскости меридианного эллипса. Решая обратную задачу перехода от прямоугольных координат к геодезическим, в зависимости от точности формул алгоритмов преобразования, будут получены различные отклонения вычисленных широт и высот от эталонных значений заданной сетки геодезических широт и высот. Ниже представлены формулы, реализованные в пяти алгоритмах.

Алгоритм 1

На рис. 1 изображена нормаль к эллипсоиду, проходящая через заданную точку.

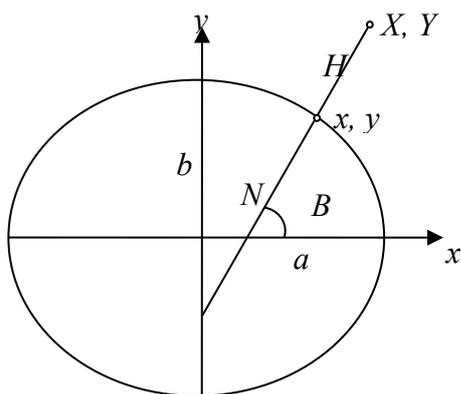


Рис. 1. Нормаль к эллипсоиду, проходящая через заданную точку

В первом алгоритме из решения системы двух уравнений (3), (4) с двумя неизвестными определяется точка пересечения меридианного эллипса с нормалью, проходящей через заданный пункт:

$$\left. \begin{aligned} \frac{a^2(X-x)}{x} - \frac{b^2(Y-y)}{y} &= 0 & (3) \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= 1 & (4) \end{aligned} \right\}$$

где  $X, Y$  – координаты пункта;  $x, y$  – искомые координаты точки пересечения нормали (уравнение (3)) и эллипса (уравнение (4));  $a, b$  – большая и малая полуоси эллипсоида.

Здесь выражение (3) является уравнением нормали, а выражение (4) – уравнением эллипса.

Для решения системы уравнений требуется замена переменных. Если сделать замену переменных в выражениях (3) и (4)

$$\tilde{X} = \frac{X}{x}; \quad \tilde{Y} = \frac{Y}{y}, \quad (5)$$

то, в результате подстановки, осуществляется переход к алгебраическому уравнению четвертой степени

$$\begin{aligned} \tilde{X}^4 - 2e^2\tilde{X}^3 + \left( e^4 - \frac{X^2 + Y^2}{a^2} + e^2 \frac{Y^2}{a^2} \right) \times \\ \times \tilde{X}^2 + 2 \frac{e^2}{a^2} X^2 \tilde{X} - \frac{e^2}{a^2} X^2 = 0, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $e^2$  – квадрат первого эксцентриситет эллипсоида вращения.

В зависимости от вида подстановки, уравнения четвертой степени у разных авторов [4, 17, 20] немного отличаются от уравнения (6). По-видимому, первым предложил выполнять преобразование координат с использованием алгебраического уравнения четвертой степени Н. Vermeille [20]. Для решения используется способ Феррари [23].

После определения  $\tilde{X}$  из решения уравнения (6), вычисляются координаты точки пересечения по формулам

$$x = \frac{X}{\tilde{X}}; \quad y = \frac{\tilde{X} - e^2}{(1 - e^2)}. \quad (7)$$

Широта и высота определяются из соотношений

$$B = \arctg \left[ \frac{y}{x(1 - e^2)} \right]; \quad (8)$$

$$H = X \cos B + Y \sin B - N \left( 1 - e^2 \sin^2 B \right), \quad (9)$$

где  $N$  – радиус кривизны первого вертикала, для определения которого может использоваться формула

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}}. \quad (10)$$

Необходимо отметить, что формулы данного перехода являются, с одной стороны, строгими, но с другой стороны, – сложными из-за необходимости решения алгебраического уравнения четвертой степени.

*Алгоритм 2*

Второй алгоритм получен на основе связи координаты  $x$  точки пересечения нормали с меридианным эллипсом с приведенной широтой

$$x = a \cos U. \quad (11)$$

Подставляя это соотношение в формулы (5) и (6), также получено алгебраическое уравнение четвертой степени

$$\bar{A} \cos^4 U + \bar{B} \cos^3 U + \bar{C} \cos^2 U + \bar{D} \cos U + \bar{E} = 0, \quad (12)$$

где  $\bar{A} = a^4 e^4 X^2$ ;  $\bar{B} = -2a^3 e^2 X^3$ ;  $\bar{C} = -a^2 X^2 [a^2 e^4 - X^2 - (1 - e^2) Y^2]$ ;  $\bar{D} = -a^4 e^4 X^2$ ;  $\bar{E} = -a^2 X^4$ .

Однако в этом случае легко находятся производные по приведенной широте  $U$  и можно не решать уравнение четвертого порядка, а уточнить приближенное значение приведенной широты с использованием производных. В работе уточнялась широта только по первой производной.

Вычислим приведенную широту точки пересечения с эллипсоидом радиуса-вектора пункта

$$U_0 = \arctg \left( \frac{Y}{X \sqrt{1 - e^2}} \right) \quad (13)$$

и подставим ее в уравнение (12). Правая часть уравнения уже не будет равна нулю, а будет равна невязке

$$F_0 = \bar{A} \cos^4 U_0 + \bar{B} \cos^3 U_0 + \bar{C} \cos^2 U_0 + \bar{D} \cos U_0 + \bar{E}. \quad (14)$$

Вычислив первую производную от уравнения (14)

$$dF_0 / dU_0 = - (4\bar{A} \cos^3 U_0 + 3\bar{B} \cos^2 U_0 + 2\bar{C} \cos U_0 + \bar{D}) \sin U_0, \quad (15)$$

получаем выражение для вычисления поправки в приведенную широту

$$\Delta U = \frac{-F_0}{dF_0 / dU_0}. \quad (16)$$

Уточнив приведенную широту

$$U = U_0 + \Delta U, \quad (17)$$

вычисляется геодезическая широта и высота по формулам

$$B = \arctg \left( \frac{\operatorname{tg} U}{\sqrt{1 - e^2}} \right); \quad (18)$$

$$H = X \cos B + Y \sin B - N (1 - e^2 \sin^2 B). \quad (19)$$

Достоинство формул данного алгоритма заключается в их простом виде.

*Алгоритм 3*

Третий алгоритм основан на использовании координат  $x_c, y_c$  центра кривизны меридиана в точке пересечения радиуса-вектора пункта с меридианным эллипсом (рис. 2).

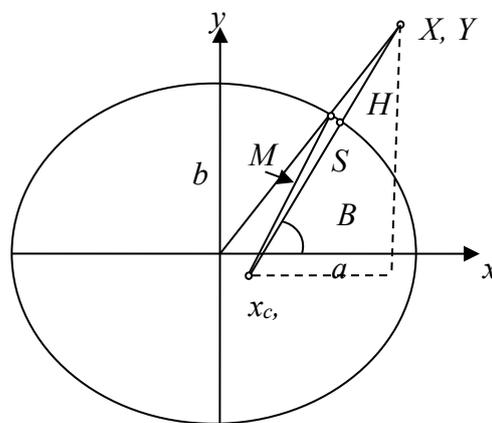


Рис. 2. Использование центра кривизны меридиана

Координаты центра кривизны определяются по формулам:

$$\begin{aligned} U_0 &= \operatorname{arctg}\left(\frac{Y}{X\sqrt{1-e^2}}\right); \\ x_c &= ae^2 \cos^3 U_0; \\ y_c &= -be'^2 \sin^3 U_0. \end{aligned} \quad (20)$$

Вычисление расстояния по координатам от центра кривизны до пункта

$$S = \sqrt{(X - x_c)^2 + (Y - y_c)^2} \quad (21)$$

позволяет получить выражения для вычисления геодезической широты и высоты

$$B = \arcsin\left(\frac{Y - y_c}{S}\right); \quad (22)$$

$$H = X \cos B + Y \sin B - N(1 - e^2 \sin^2 B). \quad (23)$$

Широту можно также определить и по формуле

$$B = \arccos\left(\frac{X - x_c}{S}\right). \quad (24)$$

Формулы (22) и (24) позволяют получить известную формулу Боуринга [19], которая связывает геодезическую широту с прямоугольными координатами пункта

$$\begin{aligned} B &= \operatorname{arctg}\left(\frac{\sin B}{\cos B}\right) = \\ &= \operatorname{arctg}\left(\frac{Y + be'^2 \sin^3 U_0}{X - ae^2 \cos^3 U_0}\right). \end{aligned} \quad (25)$$

Результаты вычисления геодезической широты по формулам (22), (24) и формуле Боуринга (25) являются идентичными.

#### Алгоритм 4

Четвертый алгоритм основан на тригонометрических соотношениях (используются теоремы синуса и косинуса) между углами и

сторонами треугольника, образованного тремя точками: пункт – центр кривизны меридиана – точка пересечения меридианного эллипса с радиусом-вектором пункта (рис. 3).

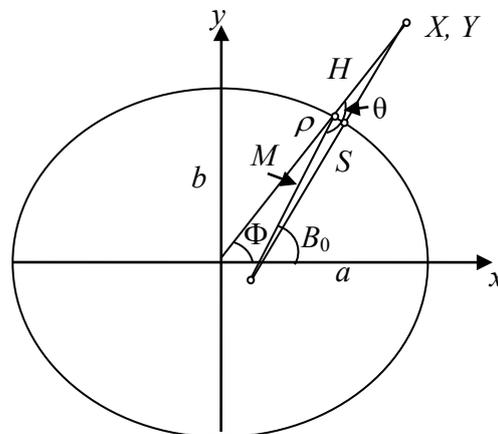


Рис. 3. Использование центра кривизны меридиана

Вначале вычисляется длина радиуса-вектора и геоцентрическая широта пункта и радиус вектор точки пересечения радиуса-вектора пункта с меридианным эллипсом по формулам

$$r = \sqrt{X^2 + Y^2}; \quad (26)$$

$$\Phi = \arccos\left(\frac{X}{r}\right); \quad (27)$$

$$\rho = \frac{a}{\sqrt{1 + e'^2 \sin^2 \Phi}}; \quad (28)$$

затем определяются углы и стороны треугольника

$$H_0 = r - \rho; \quad (29)$$

$$B_0 = \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} \Phi}{1 - e'^2}\right); \quad (30)$$

$$\theta = \pi + \Phi - B_0; \quad (31)$$

$$M = \frac{a(1 - e'^2)}{(1 - e'^2 \sin^2 B_0)^{\frac{3}{2}}}; \quad (32)$$

$$S = \sqrt{M^2 + H_0^2 - 2MH_0 \cos \theta}. \quad (33)$$

Высота с достаточной для практического применения точностью определяется из разности сторон треугольника

$$H = S - M. \quad (34)$$

С использованием теоремы синусов вычисляется поправка в широту, вычисленную по формуле (30), и приближенная широта  $B_1$

$$\Delta B = \arcsin\left(\frac{H_0}{S} \sin \theta\right); \quad B_1 = B_0 + \Delta B. \quad (35)$$

$$S = \sqrt{M^2 + H_0^2 - 2MH_0 \cos \theta}. \quad (33)$$

Высота с достаточной для практического применения точностью определяется из разности сторон треугольника

$$H = S - M. \quad (34)$$

С использованием теоремы синусов вычисляется поправка в широту, вычисленную по формуле (30), и приближенная широта  $B_1$

$$\Delta B = \arcsin\left(\frac{H_0}{S} \sin \theta\right); \quad B_1 = B_0 + \Delta B. \quad (35)$$

Далее широта уточняется по стандартным формулам

$$B = \arccos\left(\frac{X}{H + N}\right). \quad (36)$$

#### Алгоритм 5

Пятый алгоритм также основан на использовании координат центра кривизны меридиана  $x_c, y_c$  (рис. 4).

Вычисление коэффициента уравнения нормали может быть найдено из соотношений

$$U_0 = \arctg\left(\frac{Y}{X\sqrt{1-e^2}}\right); \quad (37)$$

$$x_c = ae^2 \cos^3 U_0; \quad (38)$$

$$y_c = -be'^2 \sin^3 U_0; \quad (39)$$

$$k = \frac{Y - y_c}{X - x_c}. \quad (40)$$

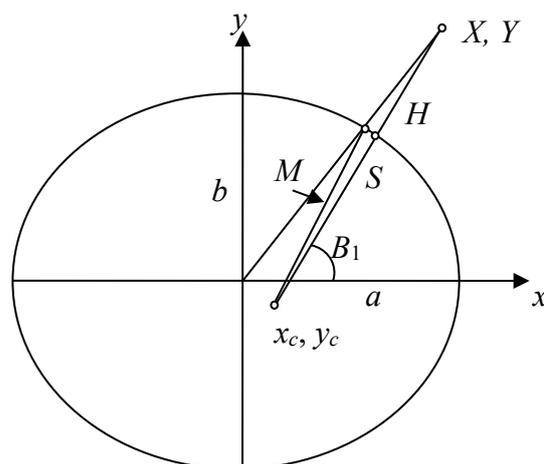


Рис. 4. Применение центра кривизны меридиана

Для определения точки пересечения нормали и меридианного эллипса с координатами необходимо решить систему двух уравнений (приближенное уравнение нормали (41) и точное уравнение меридианного эллипса (42)) с двумя неизвестными координатами  $x$  и  $y$

$$y = kx + \bar{b}; \quad (41)$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (42)$$

где  $\bar{b} = y_c - kx_c$ .

Подстановка уравнения (41) в уравнение (42) позволяет получить алгебраическое уравнение второй степени

$$\bar{A}x^2 + \bar{B}x + \bar{C} = 0, \quad (43)$$

где  $\bar{A} = b^2 + a^2k^2$ ;  $\bar{B} = 2a^2k\bar{b}$ ;  $\bar{C} = a^2\bar{b} + a^2b^2$ .

Координаты точки пересечения нормали и меридианного эллипса могут быть найдены из решения алгебраического уравнения (43)

$$x = \frac{-\bar{B} + \sqrt{\bar{B}^2 - 4\bar{A}\bar{C}}}{2\bar{A}}; \quad (44)$$

$$y = kx + \bar{b}.$$

По полученным координатам определяются геодезические высота  $H$  и широта  $B_1$

$$H = \sqrt{(X^2 - x^2) + (Y - y)^2}; \quad (45)$$

$$B_1 = \arctg\left(\frac{Y - y}{X - x}\right).$$

Найденную геодезическую широту рекомендуется уточнить по стандартным формулам

$$B = \arccos\left(\frac{X}{H + N}\right). \quad (46)$$

### Результаты экспериментов

Результаты экспериментов представлены в табл. 1–5. Как было упомянуто выше, точные значения прямоугольных координат пункта  $X$  и  $Y$  в системе координат меридианного эллипса были вычислены по заданной сетке широт и высот. В представленных ниже таблицах приведены результаты решения обратной задачи перехода от прямоугольных координат к геодезическим высотам и широтам.

Таблица 1

Расхождения вычисленных геодезических высот и широт с эталонными значениями для широты  $B = 15^\circ$

$H$ , км	$\Delta H$ , мм / $\Delta B'' \cdot 10^5$				
	Алгоритм 1	Алгоритм 2	Алгоритм 3	Алгоритм 4	Алгоритм 5
-1	$9 \cdot 10^{-7}$	$9 \cdot 10^{-7}$	0	0	$-5 \cdot 10^{-7}$
	$-7 \cdot 10^{-6}$	$2 \cdot 10^{-3}$	$3 \cdot 10^{-6}$	$-1 \cdot 10^{-6}$	$-2 \cdot 10^{-5}$
0	0	0	0	$2 \cdot 10^{-6}$	$-9 \cdot 10^{-7}$
	$-2 \cdot 10^{-5}$	$-7 \cdot 10^{-6}$	0	$2 \cdot 10^{-5}$	$-1 \cdot 10^{-5}$
1	$-9 \cdot 10^{-7}$	$9 \cdot 10^{-7}$	$-9 \cdot 10^{-7}$	0	$-3 \cdot 10^{-7}$
	$3 \cdot 10^{-6}$	$2 \cdot 10^{-3}$	$3 \cdot 10^{-6}$	$8 \cdot 10^{-6}$	$8 \cdot 10^{-6}$
10	$-9 \cdot 10^{-7}$	$-9 \cdot 10^{-7}$	$-9 \cdot 10^{-7}$	0	$-3 \cdot 10^{-7}$
	$-3 \cdot 10^{-6}$	$2 \cdot 10^{-1}$	$4 \cdot 10^{-4}$	$-1 \cdot 10^{-6}$	$-1 \cdot 10^{-6}$
100	0	$-9 \cdot 10^{-7}$	0	0	$-3 \cdot 10^{-7}$
	$1 \cdot 10^{-6}$	$2 \cdot 10^{+1}$	$3 \cdot 10^{-2}$	$2 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-4}$
1 000	$-9 \cdot 10^{-7}$	$-3 \cdot 10^{-5}$	0	$-6 \cdot 10^{-5}$	$1 \cdot 10^{-7}$
	$3 \cdot 10^{-6}$	$2 \cdot 10^{+3}$	2	$1 \cdot 10^{-2}$	$1 \cdot 10^{-2}$
10 000	0	$-3 \cdot 10^{-2}$	0	$-6 \cdot 10^{-3}$	0
	$-6 \cdot 10^{-5}$	$4 \cdot 10^{+4}$	$2 \cdot 10^{+1}$	$2 \cdot 10^{-2}$	$5 \cdot 10^{-2}$
20 000	$4 \cdot 10^{-6}$	$-1 \cdot 10^{-1}$	0	$-1 \cdot 10^{-2}$	$4 \cdot 10^{-6}$
	$-6 \cdot 10^{-5}$	$6 \cdot 10^{+4}$	$2 \cdot 10^{+1}$	$-1 \cdot 10^{-3}$	$3 \cdot 10^{-2}$

Таблица 2

Расхождения вычисленных геодезических высот и широт  
с эталонными значениями для широты  $B = 30^\circ$

$H$ , км	$\Delta H$ , мм / $\Delta B'' \cdot 10^5$				
	Алгоритм 1	Алгоритм 2	Алгоритм 3	Алгоритм 4	Алгоритм 5
-1	$-9 \cdot 10^{-7}$ $-5 \cdot 10^{-6}$	0 $3 \cdot 10^{-3}$	0 $2 \cdot 10^{-5}$	$-9 \cdot 10^{-7}$ $-7 \cdot 10^{-6}$	$-1 \cdot 10^{-7}$ $2 \cdot 10^{-6}$
0	0 $-8 \cdot 10^{-5}$	0 $-2 \cdot 10^{-6}$	0 0	0 $-2 \cdot 10^{-6}$	$-9 \cdot 10^{-7}$ $7 \cdot 10^{-6}$
1	0 $-8 \cdot 10^{-5}$	$9 \cdot 10^{-7}$ $3 \cdot 10^{-3}$	0 $2 \cdot 10^{-5}$	$-9 \cdot 10^{-7}$ $-7 \cdot 10^{-6}$	$1 \cdot 10^{-7}$ $-2 \cdot 10^{-6}$
10	0 $-7 \cdot 10^{-6}$	0 $2 \cdot 10^{-1}$	0 $2 \cdot 10^{-3}$	0 $7 \cdot 10^{-6}$	$1 \cdot 10^{-6}$ $1 \cdot 10^{-5}$
100	0 $-5 \cdot 10^{-6}$	0 $2 \cdot 10^{+1}$	$9 \cdot 10^{-7}$ $2 \cdot 10^{-1}$	0 $9 \cdot 10^{-4}$	$7 \cdot 10^{-7}$ $9 \cdot 10^{-4}$
1 000	0 $5 \cdot 10^{-5}$	$-3 \cdot 10^{-5}$ $2 \cdot 10^{+3}$	0 $1 \cdot 10^{+1}$	$-6 \cdot 10^{-4}$ $5 \cdot 10^{-2}$	$-2 \cdot 10^{-7}$ $5 \cdot 10^{-2}$
10 000	$2 \cdot 10^{-6}$ $7 \cdot 10^{-5}$	$-3 \cdot 10^{-2}$ $4 \cdot 10^{+4}$	0 $1 \cdot 10^{+2}$	$-5 \cdot 10^{-2}$ $1 \cdot 10^{-2}$	0 $2 \cdot 10^{-1}$
20 000	0 $-2 \cdot 10^{-4}$	$-1 \cdot 10^{-1}$ $6 \cdot 10^{+4}$	0 $1 \cdot 10^{+2}$	$-1 \cdot 10^{-1}$ $-6 \cdot 10^{-3}$	0 $1 \cdot 10^{-1}$

Таблица 3

Расхождения вычисленных геодезических высот и широт  
с эталонными значениями для широты  $B = 45^\circ$

$H$ , км	$\Delta H$ , мм / $\Delta B'' \cdot 10^5$				
	Алгоритм 1	Алгоритм 2	Алгоритм 3	Алгоритм 4	Алгоритм 5
-1	0 $-3 \cdot 10^{-1}$	0 $7 \cdot 10^{-5}$	0 $3 \cdot 10^{-5}$	0 0	$2 \cdot 10^{-8}$ 0
0	0 $-8 \cdot 10^{-2}$	0 $2 \cdot 10^{-6}$	0 0	$9 \cdot 10^{-7}$ $-2 \cdot 10^{-6}$	0 0
1	$-9 \cdot 10^{-7}$ $-4 \cdot 10^{-1}$	0 $7 \cdot 10^{-5}$	0 $3 \cdot 10^{-5}$	$9 \cdot 10^{-7}$ $5 \cdot 10^{-6}$	$-7 \cdot 10^{-7}$ $-2 \cdot 10^{-6}$
10	0 $-2 \cdot 10^{-1}$	$9 \cdot 10^{-7}$ $7 \cdot 10^{-3}$	0 $3 \cdot 10^{-3}$	$-9 \cdot 10^{-7}$ $7 \cdot 10^{-6}$	$5 \cdot 10^{-7}$ $1 \cdot 10^{-5}$
100	0 $2 \cdot 10^{-1}$	0 $6 \cdot 10^{-1}$	$-9 \cdot 10^{-7}$ $3 \cdot 10^{-1}$	$-2 \cdot 10^{-6}$ $9 \cdot 10^{-4}$	$-3 \cdot 10^{-7}$ $9 \cdot 10^{-4}$
1 000	$9 \cdot 10^{-7}$ $8 \cdot 10^{-2}$	$9 \cdot 10^{-7}$ $4 \cdot 10^{+1}$	$9 \cdot 10^{-7}$ $2 \cdot 10^{+1}$	$-1 \cdot 10^{-3}$ $5 \cdot 10^{-2}$	$2 \cdot 10^{-6}$ $5 \cdot 10^{-2}$
10 000	0 -3	$-4 \cdot 10^{-6}$ $3 \cdot 10^{+2}$	$-2 \cdot 10^{-6}$ $2 \cdot 10^{+2}$	$-1 \cdot 10^{-1}$ $1 \cdot 10^{-1}$	$-2 \cdot 10^{-6}$ $2 \cdot 10^{-1}$
20 000	$4 \cdot 10^{-6}$ -2	0 $3 \cdot 10^{+2}$	0 $2 \cdot 10^{+2}$	$-2 \cdot 10^{-1}$ $-6 \cdot 10^{-3}$	$4 \cdot 10^{-6}$ $1 \cdot 10^{-1}$

Таблица 4

Расхождения вычисленных геодезических высот и широт  
с эталонными значениями для широты  $B = 60^\circ$

$H, \text{ км}$	$\Delta H, \text{ мм} / \Delta B'' \cdot 10^5$				
	Алгоритм 1	Алгоритм 2	Алгоритм 3	Алгоритм 4	Алгоритм 5
-1	0	0	0	$9 \cdot 10^{-7}$	$-1 \cdot 10^{-7}$
	$-3 \cdot 10^{-5}$	$-2 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-5}$	$-5 \cdot 10^{-6}$	$-5 \cdot 10^{-6}$
0	$9 \cdot 10^{-7}$	$9 \cdot 10^{-7}$	$9 \cdot 10^{-7}$	0	$1 \cdot 10^{-6}$
	$-6 \cdot 10^{-5}$	0	0	$-5 \cdot 10^{-6}$	$-5 \cdot 10^{-6}$
1	$9 \cdot 10^{-7}$	0	$9 \cdot 10^{-7}$	0	$1 \cdot 10^{-6}$
	$9 \cdot 10^{-6}$	$-2 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^{-5}$	$-5 \cdot 10^{-6}$	0
10	$9 \cdot 10^{-7}$	$2 \cdot 10^{-6}$	$2 \cdot 10^{-6}$	$9 \cdot 10^{-7}$	$2 \cdot 10^{-6}$
	$5 \cdot 10^{-6}$	$-2 \cdot 10^{-1}$	$2 \cdot 10^{-3}$	0	$5 \cdot 10^{-6}$
100	$9 \cdot 10^{-7}$	$9 \cdot 10^{-7}$	$9 \cdot 10^{-7}$	0	$9 \cdot 10^{-7}$
	$-3 \cdot 10^{-5}$	$2 \cdot 10^{+1}$	$2 \cdot 10^{-1}$	$3 \cdot 10^{-4}$	$3 \cdot 10^{-4}$
1 000	$9 \cdot 10^{-7}$	$-3 \cdot 10^{-5}$	0	$-6 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-6}$
	$1 \cdot 10^{-5}$	$-2 \cdot 10^{+3}$	$1 \cdot 10^{+1}$	$2 \cdot 10^{-2}$	$2 \cdot 10^{-2}$
10 000	0	$-3 \cdot 10^{-2}$	0	$-5 \cdot 10^{-2}$	0
	$3 \cdot 10^{-4}$	$4 \cdot 10^{+4}$	$1 \cdot 10^{+2}$	$3 \cdot 10^{-2}$	$7 \cdot 10^{-2}$
20 000	$4 \cdot 10^{-6}$	$-1 \cdot 10^{-1}$	$7 \cdot 10^{-6}$	$-1 \cdot 10^{-1}$	0
	$-2 \cdot 10^{-4}$	$-5 \cdot 10^{+4}$	$1 \cdot 10^{+2}$	$-2 \cdot 10^{-3}$	$4 \cdot 10^{-2}$

Таблица 5

Расхождения вычисленных геодезических высот и широт  
с эталонными значениями для широты  $B = 75^\circ$

$H, \text{ км}$	$\Delta H, \text{ мм} / \Delta B'' \cdot 10^5$				
	Алгоритм 1	Алгоритм 2	Алгоритм 3	Алгоритм 4	Алгоритм 5
-1	0	$-9 \cdot 10^{-7}$	0	$-9 \cdot 10^{-7}$	$3 \cdot 10^{-7}$
	$5 \cdot 10^{-6}$	$-2 \cdot 10^{-3}$	$-5 \cdot 10^{-6}$	0	0
0	0	0	0	$9 \cdot 10^{-7}$	$1 \cdot 10^{-6}$
	0	0	$-5 \cdot 10^{-6}$	0	0
1	0	$-9 \cdot 10^{-7}$	$9 \cdot 10^{-7}$	0	$6 \cdot 10^{-7}$
	$-9 \cdot 10^{-6}$	$-2 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-6}$	0	0
10	0	0	0	$-9 \cdot 10^{-7}$	$-4 \cdot 10^{-7}$
	$-5 \cdot 10^{-6}$	$-2 \cdot 10^{-1}$	$4 \cdot 10^{-4}$	0	0
100	$9 \cdot 10^{-7}$	$9 \cdot 10^{-7}$	0	$-9 \cdot 10^{-7}$	$4 \cdot 10^{-7}$
	$-2 \cdot 10^{-5}$	$-2 \cdot 10^{+1}$	$3 \cdot 10^{-2}$	$1 \cdot 10^{-5}$	$1 \cdot 10^{-5}$
1 000	$9 \cdot 10^{-7}$	$-3 \cdot 10^{-5}$	0	$-6 \cdot 10^{-5}$	$-1 \cdot 10^{-7}$
	$-4 \cdot 10^{-6}$	$-2 \cdot 10^{+3}$	2	$9 \cdot 10^{-4}$	$9 \cdot 10^{-4}$
10 000	$-2 \cdot 10^{-6}$	$-3 \cdot 10^{-2}$	$2 \cdot 10^{-6}$	$-6 \cdot 10^{-3}$	0
	$-9 \cdot 10^{-6}$	$-4 \cdot 10^{+4}$	$2 \cdot 10^{+1}$	$1 \cdot 10^{-3}$	$4 \cdot 10^{-3}$
20 000	0	$-1 \cdot 10^{-1}$	$3 \cdot 10^{-6}$	$-1 \cdot 10^{-2}$	0
	$-5 \cdot 10^{-5}$	$-6 \cdot 10^{+4}$	$2 \cdot 10^{+1}$	$-8 \cdot 10^{-5}$	$2 \cdot 10^{-3}$

Из анализа представленных результатов вычислений по пяти алгоритмам преобразования прямоугольных координат пунктов в системе координат меридианного эллипса в геодезические широты и высоты (по критериям точности и простоте формул), можно сделать следующие выводы.

1. Если важным критерием является только погрешность вычисления, то точность алгоритмов 1, 4 и 5 является приемлемой для решения почти всех практических задач геодезии до высот 20 000 км.

2. Если важно, чтобы алгоритм обладал приемлемой точностью до высот 20 000 км и формулы имели простой вид, то таким алгоритмом является алгоритм 4.

3. Алгоритмы 2 и 3 имеют простые формулы, но пригодны только для высот, не превышающих 10 км.

### Заключение

В статье рассмотрены пять алгоритмов преобразования прямоугольных координат точек, заданных в системе координат меридианного эллипса в геодезическую высоту и широту.

Самым строгим с точки зрения аналитической геометрии является алгоритм 1. Однако в нем требуется решить алгебраическое уравнение четвертого порядка по сложным формулам.

Алгоритм 2 также связан с уравнением четвертого порядка, но оно решается приближенным методом Ньютона, что повлияло на точность метода, и он оказался пригодным только для высот, не превышающих 10 км.

В основе алгоритмов 3, 4 и 5 лежит вычисление центра кривизны меридиана в точке пересечения радиуса-вектора заданной точки и меридианного эллипса.

Из формул алгоритма 3 выводится широко известная формула Боуринга. Результаты вычислений по алгоритму 3 и формуле Боуринга совпадают. Однако по алгоритму 3 грубо вычисляются широты для высот более 10 км. Тем не менее, использование координат центра кривизны меридиана приводит к простым алгоритмам 4 и 5, точность которых достаточна для решения почти всех задач геодезии до высот 20 000 км.

### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Афонин К. Ф. Высшая геодезия. Системы координат и преобразования между ними : учеб.-метод. пособие. – Новосибирск : СГГА, 2011. – 66 с.
2. Телеганов Н. А., Елагин А. В. Высшая геодезия и основы координатно-временных систем : учеб. пособие. – Новосибирск : СГГА, 2004. – 238 с.
3. Лапинг К. А. Вычисление координат и высот по измеренным азимутам нормальных сечений и углам наклона хорд на двух исходных пунктах // Геодезия и аэрофотосъемка. – 1962. – № 1. – С. 3–8.
4. Медведев П.А. Определение широты точки способом решения алгебраического уравнения // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. – 1993. – № 4. – С. 66–72.
5. Медведев П. А. Исследования способов вычисления геодезической широты и высоты точек земной поверхности по прямоугольным координатам // Геодезия и аэрофотосъемка. – 2016. – № 3. – С. 24–28.
6. Медведев П. А., Мазуров Б. Т. Алгоритмы непосредственного вычисления геодезической широты и геодезической высоты по прямоугольным координатам // Вестник СГУГиТ. – 2016. – № 2 (34). – С. 5–13.
7. Медведев П. А., Кенжегузинова М. М. Вычисление геодезической высоты по прямоугольным пространственным координатам точек земной поверхности // Вестник Омского государственного аграрного университета. – 2016. – № 3 (23). – С. 146.
8. Медведев П. А. Математические модели преобразований пространственных координат // Геодезия и картография. – 2016. – № 3. – С. 2–7.
9. Медведев П. А., Новородская М. В., Шаров С. А. Неитеративный алгоритм вычисления геодезической широты по пространственным прямоугольным координатам // Вестник Омского государственного аграрного университета. – 2017. – № 2 (26). – С. 60–64.
10. Максимова М. В. Преобразования координат при инженерно-геодезических изысканиях // Инженерные изыскания. – 2013. – № 2. – С. 18–21.

11. Алгоритм вычисления геодезической высоты по пространственным прямоугольным координатам / В. Н. Баландин, М. Я. Брынь, С. П. Имшенецкий, А. Ю. Матвеев, А. В. Юскевич // Геодезия и картография. – 2006. – № 6. – С. 15–16.
12. Курченко Л. А., Таран В. В., Шлапак В. В. К вопросу о преобразовании геодезических прямоугольных координат в криволинейные // Геодезия и аэрофотосъемка. – 2016. – № 3. – С. 29–33.
13. Шануров Г. А., Манилова А. Д. О перевычислении пространственных декартовых координат в геодезические // Геодезия. – 2017. – № 1. – С. 13–17.
14. Шануров Г. А., Половнев О. В., Манилова А. Д. Преобразования пространственных координат при геодезическом обеспечении работы сканирующего комплекса // Геодезия и аэрофотосъемка. – 2015. – № 1. – С. 15–18.
15. Огородова Л. В. Совместное вычисление геодезической широты и высоты точек поверхности Земли // Геодезия. – 2011. – № 9. – С. 11–15.
16. Гафиатулин Х. Г., Новоселов О. Г. Решения геодезической задачи обратного преобразования плоских прямоугольных и полярных координат, определяемых системой чисел из одной сети в другую посредством проекции условно вспомогательной системы координат // Интернет-журнал Науковедение. – 2017. – № 3. – С. 1–8.
17. Полещенков В. Н. Преобразование геоцентрических декартовых координат в геодезические // Геодезия и картография. – 2011. – № 2. – С. 15–19.
18. Bowring B. R. The accuracy of geodetic latitude and height equations // Survey Review. – 1985. – Vol. 38. – P. 200–206.
19. Bowring B. R. Transformation from spatial to geodetic coordinates // Survey Review. – 1976. – Vol. 23. – P. 323–327.
20. Vermeille H. Direct transformation from geocentric coordinates to geodetic coordinates // Journal of Geodesy. – 2002. – № 76. – P. 451–454.
21. Афонин К. Ф., Трифонова Ю. С. Определение геодезической широты по пространственным прямоугольным координатам путем использования дифференциальной поправки // Интерэкспо ГЕО-Сибирь. XV Междунар. науч. конгр., 24–26 апреля 2019 г., Новосибирск : сб. материалов в 9 т. Т. 1 : Междунар. науч. конф. «Геодезия, геоинформатика, картография, маркшейдерия». – Новосибирск : СГУГиТ, 2019. № 2. – С. 3–8.
22. Афонин К. Ф. Использование дифференциальных поправок для вычисления геодезических широт по пространственным прямоугольным координатам // Вестник СГУГиТ. – 2020. – Вып. 1 (25). – С. 7–13.
23. Бронштейн И. Н., Семендяев К. А. Справочник по математике для инженеров и учащихся вузов. – 13-е изд., исправленное. – М. : Наука, 1986. – 544 с.

Получено 23.06.2021

© А. В. Елагин, Н. Н. Кобелева, 2021

## ALGORITHMS FOR CALCULATING GEODETIC HEIGHTS AND LATITUDES BY RECTANGULAR COORDINATES IN THE MERIDIAN ELLIPSE PLANE

*Alexander V. Elagin*

Siberian State University of Geosystems and Technologies, 10, Plakhotnogo St., Novosibirsk, 630108, Russia, Ph. D., Associate Professor, Department of Space and Physical Geodesy, phone: (383)361-01-59, e-mail: kaf.astronomy@ssga.ru

*Natalia N. Kobeleva*

Siberian State University of Geosystems and Technologies, 10, Plakhotnogo St., Novosibirsk, 630108, Russia, Ph. D., Associate Professor, Department of Space and Physical Geodesy, phone: (383)361-01-59, e-mail: n.n.kobeleva@mail.ru

Owing to the widespread use of GNSS technologies in geodetic practice, the problem arises of transition from rectangular spatial coordinates of points to spatial geodetic coordinates, which are necessary for the transition to flat rectangular coordinates in the Gauss-Kruger projection. The authors proposed five algorithms for

converting rectangular coordinates of points in the plane of the meridian ellipse into geodetic heights and latitudes. The first two algorithms are geometrically related to the intersection point of the ellipse with the normal passing through the point at which the rectangular spatial coordinates were obtained. The formulas of the other three algorithms are based on the geometric relationships of the point of intersection of the meridian ellipse with the straight line connecting the point with the center of curvature of the meridian. As a result of the experiments, deviations of the calculated latitudes and heights from the reference values of the given grid of geodetic coordinates were obtained. The formulas were tested not only for points under and on the earth's surface, but also outside the earth at different heights up to an altitude of 20,000 km.

**Keywords:** meridian ellipse, geodesic heights and latitudes, rectangular coordinates of the meridian ellipse, normal, center of curvature of the meridian, algebraic equations of the fourth degree, radius vector

## REFERENCES

1. Afonin, K. F. (2011). *Vysshaya geodeziya. Sistemy koordinat i preobrazovaniya mezhdurimi* [Higher Surveying. Coordinate systems and transformations between them]. Novosibirsk: SSGA Publ., 66 p. [in Russian].
2. Teleganov, N. A., & Elagin, A. V. (2004). *Vysshaya geodeziya i osnovy koordinatno-vremennykh system* [Higher geodesy and the basics of coordinate-time systems]. Novosibirsk: SSGA Publ., 238 p. [in Russian].
3. Laping, K. A. (1962). Calculation of coordinates and heights from the measured azimuths of normal sections and the angles of inclination of the chords at two starting points. *Izvestiya vuzov. Geodeziya i aerofotos'emka* [Izvestiya vuzov. Geodesy and Aerophotosurveying], 1, 3–8 [in Russian].
4. Medvedev, P. A. (1993). Determining the latitude of a point by solving an algebraic equation. *Izvestiya vuzov. Geodeziya i aerofotos'emka* [Izvestiya vuzov. Geodesy and Aerophotosurveying], 4, 66–72 [in Russian].
5. Medvedev, P. A. (2016). Research on methods for calculating the geodetic latitude and height of points on the earth's surface in rectangular coordinates. *Izvestiya vuzov. Geodeziya i aerofotos'emka* [Izvestiya vuzov. Geodesy and Aerophotosurveying], 3, 24–28 [in Russian].
6. Medvedev, P. A., & Mazurov, B. T. (2016). Algorithms for the direct calculation of geodesic latitude and geodesic height from rectangular coordinates. *Vestnik SGUGiT* [Vestnik SSUGT], 3(34), 5–13 [in Russian].
7. Medvedev P. A., & Kenzhuginova M. M. (2016). Calculation of the geodetic height from the rectangular spatial coordinates of the points on the earth's surface. *Vestnik Omskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta* [Bulletin of the Omsk State Agrarian University], 3(23), p. 146.
8. Medvedev, P. A. (2016). Mathematical models of transformations of spatial coordinates. *Geodeziya i kartografiya* [Geodesy and Cartography], 3, 2–7 [in Russian].
9. Medvedev, P. A., Novorodskaya, M. V., & Sharov, S. A. (2017). Non-iterative algorithm for calculating geodetic latitude using spatial rectangular coordinates. *Vestnik Omskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta* [Bulletin of the Omsk State Agrarian University], 2(26), 60–64.
10. Maksimova, M. V. (2013). Century Transformations of coordinates in engineering and geodetic surveys. *Inzhenernye izyskaniya* [Engineering Surveys], 2, 18–21 [in Russian].
11. Balandin, V. N., & Bryn, M. Ya., Imshenetskiy, S. P., Matveev, A. Yu., & Yuskevich, A. V. (2006). Algorithm for calculating the geodetic height from spatial rectangular coordinates. *Geodeziya i kartografiya* [Geodesy and Cartography], 6, 15–16 [in Russian].
12. Kurchenko, L. A., Taran, V. V., & Shlapak, V. V. (2016). On the question of the transformation of geodesic rectangular coordinates into curved. *Izvestiya vuzov. Geodeziya i aerofotos'emka* [Izvestiya vuzov. Geodesy and Aerophotosurveying], 3, 29–33 [in Russian].
13. Shanurov G. A., Manilova A. D. (2017). On the recalculation of spatial Cartesian coordinates into geodesics. *Izvestiya vuzov. Geodeziya i aerofotos'emka* [Izvestiya vuzov. Geodesy and Aerophotosurveying], 1, 13–17 [in Russian].
14. Shanurov, G. A., Polovnev, O. V., & Manilova, A. D. (2015). Transformations of spatial coordinates during geodetic support of the scanning complex. *Izvestiya vuzov. Geodeziya i aerofotos'emka* [Izvestiya vuzov. Geodesy and Aerophotosurveying], 1, 15–18 [in Russian].
15. Ogorodova, L. V. (2011). Joint calculation of the geodetic latitude and height of points on the surface of the earth. *Izvestiya vuzov. Geodeziya i aerofotos'emka* [Izvestiya vuzov. Geodesy and Aerophotosurveying], 9, 11–15 [in Russian].

16. Gafiatulin, Kh. G., & Novoselov, O. G. (2017). Solutions of the geodesic problem of the inverse transformation of plane rectangular and polar coordinates, determined by a system of numbers from one network to another through the projection of a conditionally auxiliary coordinate system. *Internet-zhurnal Naukovedenie [Internet Journal of Science]*, 3, 1–8 [in Russian].
17. Poleshenkov, V. N. (2011). Converting geocentric cartesian coordinates to geodetic coordinates. *Geodeziya i kartografiya [Geodesy and Cartography]*, 2, 15–19 [in Russian].
18. Bowring, B. R. (1985). The accuracy of geodetic latitude and height equations. *Survey Review*, 38, 200–206.
19. Bowring, B. R. (1976). Transformation from spatial to geodetic coordinates. *Survey Review*, 23, 323–327.
20. Vermeille H. (2002). Direct transformation from geocentric coordinates to geodetic coordinates. *Journal of Geodesy*, 76, 451–454.
21. Afonin, K. F., & Trifonova, Yu. S. (2019). Determination of geodetic latitude by spatial rectangular coordinates using differential correction. In *Sbornik materialov Interekspo GEO-Sibir'-2019: Mezhdunarodnoy nauchnoy konferentsii: T. 1, No. 2. Geodeziya, geoinformatika, kartografiya i marksheyderiya [Proceedings of Interexpo GEO-Siberia-2019: International Scientific Conference: Vol. 1, No. 2. Surveying, Geoinformatics, Cartography and Mine Surveying]* (pp. 3–8). Novosibirsk: SSUGT Publ. [in Russian].
22. Afonin, K. F. (2020). Using differential corrections to calculate geodetic latitudes from spatial rectangular coordinates. *Vestnik SGUGiT [Vestnik SSUGT]*, 25(1), 7–13 [in Russian].
23. Bronshtein, I. N., & Semendyaev, K. A. (1986). *Spravochnik po matematike dlja inzhenerov i uchashhihsja vuzov [A guide to mathematics for engineers and college students]* (13th ed.). Moscow: Nauka Publ., 544 p. [in Russian].

Received 23.06.2021

© A. V. Elagin, N. N. Kobeleva, 2021