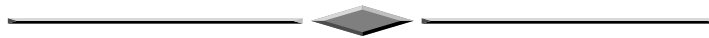


ГЕОДЕЗИЯ И МАРКШЕЙДЕРИЯ



УДК 528.23

DOI: 10.33764/2411-1759-2020-25-1-7-15

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ПОПРАВОК ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ШИРОТ ПО ПРОСТРАНСТВЕННЫМ ПРЯМОУГОЛЬНЫМ КООРДИНАТАМ

Константин Федорович Афонин

Сибирский государственный университет геосистем и технологий, 630108, Россия, г. Новосибирск, ул. Плеханова, 10, кандидат технических наук, доцент кафедры космической и физической геодезии, тел. (383)343-29-11

Для координатного обеспечения территорий основными в настоящее время являются ГНСС-технологии, которые можно применять практически повсеместно. Однако они позволяют получить лишь пространственные прямоугольные координаты определяемых точек. Большинству пользователей, как правило, необходимы другие координаты – плоские прямоугольные координаты Гаусса – Крюгера. Координаты Гаусса – Крюгера можно вычислить только по геодезическим широтам и долготам. В специальной литературе описано более полутора десятков способов вычисления геодезической широты по пространственным прямоугольным координатам. Для решения этой задачи обычно используют какие-либо итерационные или неитерационные способы. И у тех, и у других есть свои достоинства и недостатки. В работе применен третий путь решения задачи, который был популярен в 60-е гг. прошлого века. Предлагается вычислять и использовать дифференциальную поправку в начальное (приближенное) значение геодезической широты. Получены рабочие формулы, реализующие данную идею. От ранее опубликованных формул они отличаются тем, что позволяют получить геодезическую широту с большей точностью. Приведены числовые примеры, показывающие возможность практического применения предлагаемого способа при любых высотах наземных точек.

Ключевые слова: системы координат, геодезические широта и высота, пространственные геодезические прямоугольные координаты, дифференциальные поправки в геодезическую широту.

Введение

Для геодезистов, использующих ГНСС-технологии, задача по определению пространственных геодезических координат (широт, долгот и высот) B , L , H по пространственным прямоугольным координатам X , Y , Z является ключевой. Дело в том, что для связи двух систем прямоугольных координат, пространственной и плоской, нет формул прямого перехода. Он выполняется в два этапа. На первом

этапе необходимо по известным пространственным прямоугольным координатам вычислить геодезические широты, долготы и высоты, а на втором – от полученных широт и долгот перейти к координатам Гаусса – Крюгера.

Данная работа посвящена решению задач первого этапа. В специальной литературе [1–3] приводятся строгие формулы для вычисления пространственных прямоугольных координат по пространственным геодезическим координатам

$$X = (N + H) \cos B \cos L; \quad (1)$$

$$Y = (N + H) \cos B \sin L; \quad (2)$$

$$Z = (N(1 - e^2) + H) \sin B. \quad (3)$$

Здесь N – радиус кривизны первого вертикала, для определения которого может использоваться формула

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}}, \quad (4)$$

где a, e^2 – соответственно большая полуось и квадрат первого эксцентриситета эллипсоида вращения.

При выполнении обратного перехода не вызывает затруднений только определение геодезической долготы. По-иному обстоит дело с геодезической широтой, которая зависит и от широты, и от высоты [1, 3]

$$B = \arctg \left(\frac{Z}{Q \left(1 - \frac{Ne^2}{N + H} \right)} \right). \quad (5)$$

Расстояние от центра пространственной прямоугольной системы координат до проекции точки на плоскость экватора Q может вычисляться по формуле

$$Q = \sqrt{X^2 + Y^2}. \quad (6)$$

Теория и методы

В научной литературе, учебниках и различных ГОСТ описано более полутора десятков способов вычисления геодезической широты по пространственным прямоугольным координатам. Эти способы реализуют либо итерационные [1–18], либо неитерационные пути решения данной задачи [19–21]. Первый итерационный алгоритм был предложен К. А. Лапингом [4] на заре использования ИСЗ в геодезии. Известные формулы Б. Р. Боуринга [19, 20] являются примером использования второго неитерационного пути.

Однако есть еще и третий путь: путь вычисления дифференциальной поправки и последующего введения ее в приближенное значение геодезической широты. Одним из первых этот путь был реализован А. В. Буткевичем в 1967 г. [22]. Цель данной работы – показать, что такой подход к решению задачи не исчерпал себя и может конкурировать с первыми двумя. В отличие от работы [23], в данной статье получены формулы, позволяющие решать задачу с большей точностью.

Основная идея заключается в том, чтобы представить геодезическую широту B в общем виде в функции геодезической высоты H

$$B = \varphi(0 + H). \quad (7)$$

Эту функцию можно разложить в ряд К. Маклорена с учетом производных второго порядка

$$B = \varphi(0) + \left(\frac{d\varphi}{dH}\right)_0 H + \left(\frac{d^2\varphi}{dH^2}\right)_0 \frac{H^2}{2} + \dots \quad (8)$$

Начальное значение широты B_0 может быть найдено по формуле (5) при высоте, равной нулю [1, 3, 4]

$$B_0 = \varphi(0) = \operatorname{arctg}\left(\frac{Z}{Q(1-e^2)}\right). \quad (9)$$

В этом случае геодезическую широту можно представить в виде суммы

$$B = B_0 + \Delta B, \quad (10)$$

где

$$\Delta B = \left(\frac{d\varphi}{dH}\right)_0 H + \left(\frac{d^2\varphi}{dH^2}\right)_0 \frac{H^2}{2}. \quad (11)$$

Подстановка производных в формулу (11) позволяет получить выражения для вычисления поправки в начальное значение широты

$$\Delta B = -\frac{TN_0 e^2 \cos^2 B_0 H_0}{G_0^2} \left(1 + \frac{H_0}{G_0}\right) \rho; \quad (12)$$

$$T = \frac{Z}{Q}; \quad (13)$$

$$G_0 = N_0(1 - e^2) + H_0. \quad (14)$$

Индекс «0» в формулах (12)–(14) означает, что данные величины должны вычисляться по начальному значению геодезической широты.

В статье [23] при вычислении поправки ΔB в выражении (11) учитывались только первые производные. Поэтому формула (12) имела более простой вид

$$\Delta B = -\frac{TN_0 e^2 \cos^2 B_0 H_0}{G_0^2} \rho. \quad (15)$$

Порядок действий при использовании дифференциальной поправки для вычисления геодезической широты может состоять из пяти этапов. На первом этапе необходимо вычислить приближенное значение геодезической широты B_0

$$B_0 = \operatorname{arctg} \left(\frac{T}{(1-e^2)} \right). \quad (16)$$

Второй этап посвящен определению приближенного значения радиуса кривизны первого вертикала N_0 по формуле (4). На третьем этапе алгоритма необходимо получить приближенное значение геодезической высоты H_0 [1, 3]

$$H_0 = Q \cos B_0 + Z \sin B_0 - N_0(1 - e^2 \sin^2 B_0). \quad (17)$$

Четвертый этап заключается в определении дифференциальной поправки ΔB в приближенное значение широты. Для этого должны использоваться равенства (12)–(14). Геодезическая широта на заключительном пятом этапе вычисляется как сумма двух слагаемых по формуле (10). Окончательное значение геодезической высоты можно получить по формулам (4), (17).

Пример использования дифференциальных поправок

Возможность применения предлагаемого способа и алгоритма была проверена на числовом примере. Проверка выполнялась в два этапа. На первом этапе по заданным пространственным геодезическим координатам девяти точек на эллипсоиде ГСК-2011 по формулам (1)–(4) были вычислены пространственные прямоугольные координаты. У первых семи точек геодезические широты и долготы были одинаковые ($B = 60^\circ 00' 00,00000''$, $L = 80^\circ 00' 00,00000''$). Их положение различалось только по высоте. Высоты точек последовательно принимались равными: 200, 500, 1000, 5000, 10000, $-5\,000$, $-10\,000$ м. Последние две гипотетические точки были нужны для оценки возможности применения способа и алгоритма при отрицательных высотах. У восьмой точки геодезические координаты были заданы следующие: $B = 89^\circ 00' 00,00000''$, $L = 80^\circ 00' 00,00000''$, $H = 200,0000$ м. Девятая точка имела геодезические координаты: $B = 30^\circ 00' 00,00000''$, $L = 80^\circ 00' 00,00000''$, $H = 10\,000,0000$ м. Вычисленные пространственные прямоугольные координаты точек приведены в табл. 1.

Таблица 1

Пространственные прямоугольные координаты

№ точки	X (м)	Y (м)	Z (м)
1	555188,7104	3148631,6398	5500649,8450
2	555214,7576	3148779,3610	5500909,6527
3	555258,1697	3149025,5629	5501342,6654
4	555605,4660	3150995,1785	5504806,7670
5	556039,5865	3153457,1978	5509136,8940
6	554737,2252	3146071,1397	5496146,5129
7	554303,1047	3143609,1203	5491816,3859
8	19395,0562	109994,8296	6355977,0399
9	961475,4553	5452798,2699	3175373,4362

На втором этапе эти координаты использовались для получения геодезической широты предлагаемым способом и геодезической высоты. Результаты вычислений сведены в табл. 2.

Таблица 2

Вычисленные геодезические широты и высоты

№ точки	B_1	B	H (м)
1	60°00'00,00000"	60°00'00,00000"	200,0000
2	60°00'00,00000"	60°00'00,00000"	500,0000
3	60°00'00,00001"	60°00'00,00000"	1 000,0000
4	60°00'00,00037"	60°00'00,00000"	5 000,0000
5	60°00'00,00148"	60°00'00,00001"	10 000,0000
6	60°00'00,00037"	60°00'00,00000"	-5 000,0000
7	60°00'00,00150"	60°00'00,00001"	-10 000,0000
8	89°00'00,00000"	89°00'00,00000"	200,0000
9	30°00'00,00148"	30°00'00,00000"	10 000,0000

В колонке B_1 табл. 2 приведены геодезические широты, полученные описанным в статье [23] способом с вычислением дифференциальных поправок по формуле (15). Анализ результатов вычислений позволяет утверждать, что формулу (15) можно применять при геодезических высотах до 1000 м. При увеличении высоты погрешность определения геодезических широт резко возрастает. Так, при высоте 5 000 м она равна 0,000 4", а на высоте в 10 000 м – 0,001 5".

Использование формулы (12) для вычисления дифференциальных поправок позволяет значительно повысить точность определения геодезических широт (колонка B табл. 2). Анализ данных, приведенных в этой колонке, позволяет

утверждать, что предлагаемый способ можно с успехом применять на практике при любых возможных на Земле высотах.

Заключение

Таким образом, предлагаемый способ вычисления геодезической широты реализует третий путь решения задачи, который заключается в использовании дифференциальных поправок в приближенные значения. Этот путь был популярен в 60-е гг. прошлого века. В отличие от других аналогичных способов [22, 23] он позволяет получить геодезическую широту с большей точностью. Анализ результатов экспериментальных вычислений позволяет говорить о том, что погрешность определения широты не должна превышать $0,000\ 01-0,000\ 02''$. По трудоемкости вычислений и точности полученных результатов его можно поставить в один ряд с классическими способами К. А. Лапинга и Б. Р. Боуринга. Поэтому предлагаемый способ и алгоритм можно, по нашему мнению, рекомендовать для практического использования.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Афонин К. Ф. Высшая геодезия. Системы координат и преобразования между ними : учеб.-метод. пособие. – Новосибирск : СГГА, 2011. – 66 с.
2. ГОСТ Р32453–2017. Системы координат. Методы преобразований координат определяемых точек. Межгосударственный стандарт. – Введ. 2018-01-07. – М. : Стандартинформ, 2017. – 19 с.
3. Телеганов Н. А., Елагин А. В. Высшая геодезия и основы координатно-временных систем : учеб. пособие. – Новосибирск : СГГА, 2004. – 238 с.
4. Лапинг К. А. Вычисление координат и высот по измеренным азимутам нормальных сечений и углам наклона хорд на двух исходных пунктах // Геодезия и аэрофотосъемка. – 1962. – № 1. – С. 3–8.
5. Липатников Л. А. Эксперимент по формированию геоцентрической земной координатной основы на территории России и ближнего зарубежья // Вестник СГУГиТ. – 2016. – № 3 (35). – С. 16–26.
6. Медведев П. А. Исследования способов вычисления геодезической широты и высоты точек земной поверхности по прямоугольным координатам // Геодезия и аэрофотосъемка. – 2016. – № 3. – С. 24–28.
7. Медведев П. А., Мазуров Б. Т. Алгоритмы непосредственного вычисления геодезической широты и геодезической высоты по прямоугольным координатам // Вестник СГУГиТ. – 2016. – Вып. 2 (34). – С. 5–13.
8. Медведев П. А., Кенжегузинова М. М. Вычисление геодезической высоты по прямоугольным пространственным координатам точек земной поверхности // Вестник Омского государственного аграрного университета. – 2016. – № 3 (23). – С. 146.
9. Медведев П. А. Математические модели преобразований пространственных координат // Геодезия и картография. – 2016. – № 3. – С. 2–7.
10. Обиденко В. И. Об изменении координат на территории Российской Федерации при переходе от СК-95 к ГСК-2011 // Вестник СГУГиТ. – 2017. – Т. 22, № 2. – С. 5–21.
11. Обиденко В. И. Определение метрических параметров территории Российской Федерации средствами геоинформационных систем // Вестник СГУГиТ. – 2018. – Т. 23, № 2. – С. 18–33.

12. Максимова М. В. Преобразования координат при инженерно-геодезических изысканиях // Инженерные изыскания. – 2013. – № 2. – С. 18–21.
13. Алгоритм вычисления геодезической высоты по пространственным прямоугольным координатам / В. Н. Баландин, М. Я. Брынь, С. П. Имшенецкий, А. Ю. Матвеев, А. В. Юскевич // Геодезия и картография. – 2006. – № 6. – С. 15–16.
14. Курченко Л. А., Таран В. В., Шлапак В. В. К вопросу о преобразовании геодезических прямоугольных координат в криволинейные // Геодезия и аэрофотосъемка. – 2016. – № 3. – С. 29–33.
15. Шануров Г. А., Манилова А. Д. О перевычислении пространственных декартовых координат в геодезические // Геодезия. – 2017. – № 1. – С. 13–17.
16. Шануров Г. А., Половнев О. В., Манилова А. Д. Преобразования пространственных координат при геодезическом обеспечении работы сканирующего комплекса // Геодезия и аэрофотосъемка. – 2015. – № 1. – С. 15–18.
17. Огородова Л. В. Совместное вычисление геодезической широты и высоты точек поверхности Земли // Геодезия. – 2011. – № 9. – С. 11–15.
18. Гафиатулин Х. Г., Новоселов О. Г. Решения геодезической задачи обратного преобразования плоских прямоугольных и полярных координат, определяемых системой чисел из одной сети в другую посредством проекции условно вспомогательной системы координат // Интернет-журнал Науковедение. – 2017. – № 3. – С. 1–8.
19. Bowring B. R. The accuracy of geodetic latitude and height equations // Surv. Rev. – 1985. – Vol. 38. – P. 200–206.
20. Bowring B. R. Transformation from spatial to geodetic coordinates // Surv. Rev. – 1976. – Vol. 23. – P. 323–327.
21. Медведев П. А., Новородская М. В., Шаров С. А. Неитеративный алгоритм вычисления геодезической широты по пространственным прямоугольным координатам // Вестник Омского государственного аграрного университета. – 2017. – № 2 (26). – С. 60–64.
22. Буткевич А. В. О переходе от пространственных прямоугольных координат к геодезическим // Геодезия и картография. – 1967. – № 5. – С. 6–7.
23. Афонин К. Ф., Трифонова Ю. С. Определение геодезической широты по пространственным прямоугольным координатам путем использования дифференциальной поправки // Интерэкспо ГЕО-Сибирь. XV Междунар. науч. конгр., 24–26 апреля 2019 г., Новосибирск : сб. материалов в 9 т. Т. 1 : Междунар. науч. конф. «Геодезия, геоинформатика, картография, маркшейдерия». – Новосибирск : СГУГиТ, 2019. № 2. – С. 3–8.

Получено 03.10.2019

© К. Ф. Афонин, 2020

USE OF DIFFERENTIAL CORRECTIONS FOR CALCULATING GEODETIC LATITUDES ON SPATIAL RECTANGULAR COORDINATES

Konstantin F. Afonin

Siberian State University of Geosystems and Technologies, 10, Plakhotnogo St., Novosibirsk, 630108, Russia, Ph. D., Associate Professor, Department of Space and Physical Geodesy, phone: (383)343-29-11

Currently, GNSS technologies are the main ones for coordinate support of territories, which can be used almost everywhere. However, they allow to get only the spatial rectangular coordinates of the defined points. Most users, as a rule, need other coordinates – flat rectangular Gauss-Kruger

coordinates. The Gauss–Kruger coordinates can only be calculated from geodetic latitudes and longitudes. The special literature describes more than a dozen ways to calculate geodetic latitude using spatial rectangular coordinates. Some iterative or non-iterative methods are usually used to solve this problem. Both have their advantages and disadvantages. The paper uses the third way of solving the problem, which was popular in the 60s of the last century. It is proposed to calculate and use a differential correction to the initial (approximate) value of the geodetic latitude. Working formulas that implement this idea are obtained. They differ from previously published formulas in that they allow to get the geodetic latitude with greater accuracy. Numerical examples are given showing the possibility of practical application of the proposed method at any heights of ground points.

Key words: coordinate systems, geodesic latitude and altitude, spatial geodesic rectangular coordinates, differential corrections to geodesic latitude.

REFERENCES

1. Afonin, K. F. (2011). *Vysshaya geodeziya. Sistemy koordinat i preobrazovaniya mezhdu nimi [Higher Surveying. Coordinate systems and transformations between them]*. Novosibirsk: SSGA Publ., 66 p. [in Russian].
2. GOST R 32453-2017. (2017). Coordinate systems. Methods of transforming coordinates of defined points. Interstate standard (Enter. 2018-01-07.). Moscow: Stadartinform, 19 p. [in Russian].
3. Teleganov, N. A., & Elagin, A. V. (2004). *Vysshaya geodeziya i osnovy koordinatno-vremennykh system [Higher geodesy and the basics of coordinate-time systems]*. Novosibirsk: SSGA Publ., 238 p. [in Russian].
4. Laping, K. A. (1962). Calculation of coordinates and heights from the measured azimuths of normal sections and the angles of inclination of the chords at two starting points. *Izvestiya vuzov. Geodeziya i aerofotos'emka [Izvestiya vuzov. Geodesy and Aerophotography]*, 1, 3–8 [in Russian].
5. Lipatnikov, L. A. (2016). An experiment on the formation of a geocentric earth coordinate system on the territory of Russia and neighboring countries. *Vestnik SGUGiT [Vestnik SSUGT]*, 3(35), 16–26 [in Russian].
6. Medvedev, P. A. (2016). Research on methods for calculating the geodetic latitude and height of points on the earth's surface in rectangular coordinates. *Izvestiya vuzov. Geodeziya i aerofotos'emka [Izvestiya vuzov. Geodesy and Aerophotography]*, 3, 24–28 [in Russian].
7. Medvedev, P. A., & Mazurov, B. T. (2016). Algorithms for the direct calculation of geodesic latitude and geodesic height from rectangular coordinates. *Vestnik SGUGiT [Vestnik SSUGT]*, 3(34), 5–13 [in Russian].
8. Medvedev P. A., & Kenzheguzinova M. M. (2016). Calculation of the geodetic height from the rectangular spatial coordinates of the points on the earth's surface. *Vestnik Omskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta [Bulletin of the Omsk State Agrarian University]*, 3(23), p. 146.
9. Medvedev, P. A. (2016). Mathematical models of transformations of spatial coordinates. *Geodeziya i kartografiya [Geodesy and Cartography]*, 3, 2–7 [in Russian].
10. Obidenko, V. I. (2017). About the change of coordinates on the territory of the Russian Federation during the transition from SK-95 to GSK-2011. *Vestnik SGUGiT [Vestnik SSUGT]*, 22(2), 5–21 [in Russian].
11. Obidenko, V. I. (2018). Determination of the metric parameters of the territory of the Russian Federation by means of geographic information systems. *Vestnik SGUGiT [Vestnik SSUGT]*, 23(2), 18–33 [in Russian].
12. Maksimova, M. V. (2013). Century Transformations of coordinates in engineering and geodetic surveys. *Inzhenernye izyskaniya [Engineering Surveys]*, 2, 18–21 [in Russian].
13. Balandin, V. N., Bryn, M. Ya., Imshenetskiy, S. P., Matveev, A. Yu., & Yuskevich, A. V. (2006). Algorithm for calculating the geodetic height from spatial rectangular coordinates. *Geodeziya i kartografiya [Geodesy and Cartography]*, 6, 15–16 [in Russian].

14. Kurchenko, L. A., Taran, V. V., & Shlapak, V. V. (2016). On the question of the transformation of geodesic rectangular coordinates into curved. *Izvestiya vuzov. Geodeziya i aerofotos'emka [Izvestiya vuzov. Geodesy and Aerophotography]*, 3, 29–33 [in Russian].
15. Shanurov G. A., Manilova A. D. (2017). On the recalculation of spatial Cartesian coordinates into geodesics. *Izvestiya vuzov. Geodeziya i aerofotos'emka [Izvestiya vuzov. Geodesy and Aerophotography]*, 1, 13–17 [in Russian].
16. Shanurov, G. A., Polovnev, O. V., & Manilova, A. D. (2015). Transformations of spatial coordinates during geodetic support of the scanning complex. *Izvestiya vuzov. Geodeziya i aerofotos'emka [Izvestiya vuzov. Geodesy and Aerophotography]*, 1, 15–18 [in Russian].
17. Ogorodova, L. V. (2011). Joint calculation of the geodetic latitude and height of points on the surface of the earth. *Izvestiya vuzov. Geodeziya i aerofotos'emka [Izvestiya vuzov. Geodesy and Aerophotography]*, 9, 11–15 [in Russian].
18. Gafiatulin, Kh. G., & Novoselov, O. G. (2017). Solutions of the geodesic problem of the inverse transformation of plane rectangular and polar coordinates, determined by a system of numbers from one network to another through the projection of a conditionally auxiliary coordinate system. *Internet-zhurnal Naukovedenie [Internet Journal of Science]*, 3, 1–8 [in Russian].
19. Bowring, B. R. (1985). The accuracy of geodetic latitude and height equations. *Surv. Rev.*, 38, 200–206.
20. Bowring, B. R. (1976). Transformation from spatial to geodetic coordinates. *Surv. Rev.*, 23, 323–327.
21. Medvedev, P. A., Novorodskaya, M. V., & Sharov, S. A. (2017). Non-iterative algorithm for calculating geodetic latitude using spatial rectangular coordinates. *Vestnik Omskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta [Bulletin of the Omsk State Agrarian University]*, 2(26), 60–64.
22. Butkevich, A. V. (1967). On the transition from spatial rectangular coordinates to geodesic. *Geodeziya i kartografiya [Geodesy and Cartography]*, 5, 6–7 [in Russian].
23. Afonin, K. F., & Trifonova, Yu. S. (2019). Determination of geodetic latitude by spatial rectangular coordinates using differential correction. In *Sbornik materialov Interekspo GEO-Sibir'-2019: Mezhdunarodnoy nauchnoy konferentsii: T. 1, No. 2 Geodeziya, geoinformatika, kartografiya i marksheyderiya [Proceedings of Interexpo GEO-Siberia-2019: International Scientific Conference: Vol. 1, No. 2. Surveying, Geoinformatics, Cartography and Surveying]* (pp. 3–8). Novosibirsk: SSUGT Publ. [in Russian].

Received 03.10.2019

© K. F. Afonin, 2020