

УДК 528.23

DOI: 10.33764/2411-1759-2020-25-1-55-66

## **АЗИМУТЫ КРИВОЙ НОРМАЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ ЗЕМНОГО СФЕРОИДА В СИСТЕМЕ УНИТАРНЫХ ДЕКАРТОВЫХ ГЕОЦЕНТРИЧЕСКИХ КООРДИНАТ**

*Владимир Абрамович Падве*

Сибирский государственный университет геосистем и технологий, 630108, Россия, г. Новосибирск, ул. Плеханова, 10, кандидат технических наук, доцент, кафедра прикладной информатики и информационных систем, тел. (383)343-18-53, e-mail: evdapav@mail.ru

В статье приводятся новые формулы для вычисления азимута кривой нормального сечения по координатам его конечных точек в системе унитарных декартовых геоцентрических координат. Решение выполнено с использованием аппарата векторной алгебры. Существующие формулы для вычисления азимута нормального сечения по координатам его конечных точек представлены в системе криволинейных геодезических координат – широт и долгот этих точек. Предлагаемые векторные формулы, как и уже известные в системе криволинейных координат, являются замкнутыми и решают поставленную задачу «с точностью до положения в пространстве». По объему вычислений все решения практически эквивалентны.

Получение формул в системе декартовых геоцентрических координат мотивировано тем, что при решении геоспутниковых задач такие координаты являются базовыми.

**Ключевые слова:** унитарная декартова геоцентрическая система координат, орт нормали, касательный орт, нормальная плоскость.

### *Введение*

Актуальность вычисления азимута кривой нормального сечения эллипсоида естественна, так как представляет собой одну из классических задач сфероидической геодезии. Такой азимут является, во-первых, искомой величиной при решении обратной геодезической задачи по этим кривым, во-вторых, с его помощью может и должно быть проконтролировано решение прямой геодезической задачи. Кроме того, указанный азимут необходимо использовать для контроля координатизации поверхности земного сфероида по технологии азимутальной засечки (рис. 1) [1, 2]. Данная задача является одной из важнейших в сфероидической геодезии, что отражено в многочисленных исследованиях, некоторые из которых представлены в библиографическом списке предлагаемой статьи [3–11].

Впервые формулы для нахождения азимута прямого нормального сечения были получены во второй половине XIX в. В 1865 г. свои формулы опубликовал Ф. А. Слудский [12], а в 1880 г. – Ф. Р. Гельмерт [13]. Первый предпочел выразить искомый азимут как аргумент тригонометрической функции тангенс от широт и долгот конечных точек нормального сечения, а второй – функции котангенс.

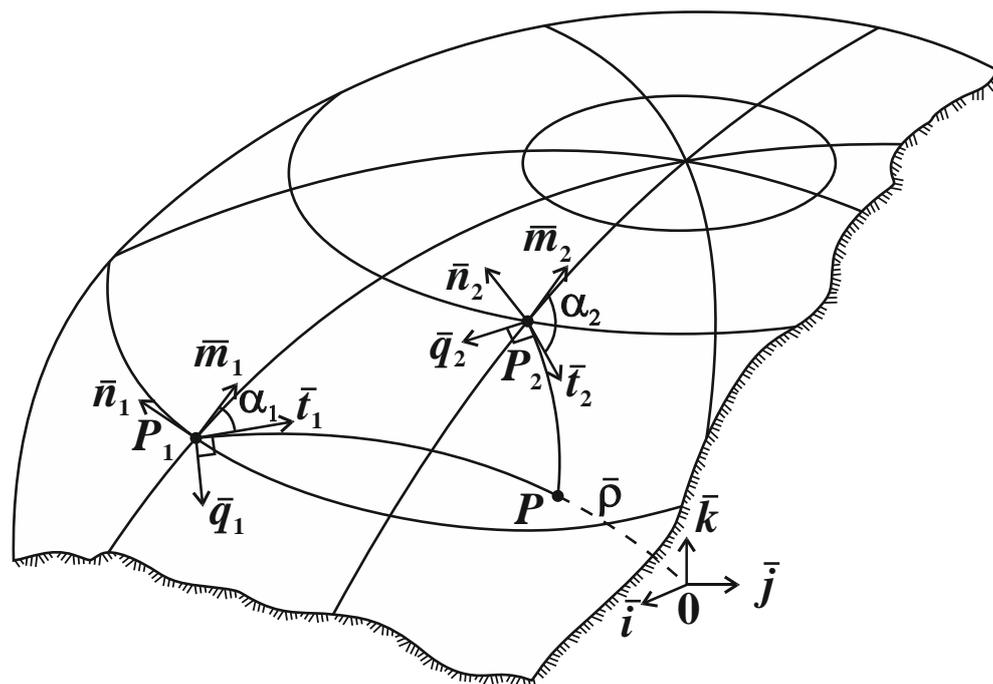


Рис. 1. Азимутальная засечка на сфероиде

На рисунке введены следующие обозначения:  $P$  – пункт на поверхности земного сфероида (без индекса – определяемый);  $\bar{n}$  – орт нормали к сфероиду;  $\bar{m}$  – орт, касательный к меридиану;  $\bar{t}$  – орт, касательный к нормальному сечению, идущему относительно меридиана под азимутом  $\alpha$ ;  $\bar{q}$  – орт, перпендикулярный плоскости нормального сечения;  $\bar{r}$  – текущий вектор, выходящий из начала «0» геоцентрической системы координат  $X, Y, Z$ ;  $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$  – орты осей координат этой системы. Формулы, определяющие описанные здесь векторы в геоцентрической системе координат, приводятся далее по тексту статьи.

В течение 1967 г. были опубликованы еще три новые группы формул, авторами которых были В. Н. Ганьшин [14], Б. С. Кузьмин [15] и К. Л. Проворов [16]. В. Н. Ганьшин привел формулу для котангенса азимута, а Б. С. Кузьмин и К. Л. Проворов отдали предпочтение тангенсу.

Аргументами функций тангенса или котангенса азимута прямого нормального сечения у всех авторов были криволинейные геодезические координаты конечных точек этой кривой: широты  $B_1, B_2$  и долготы  $L_1, L_2$ . Все пять указанных формул являются замкнутыми выражениями, и вычисления по ним приводят, естественно, к одинаковым числовым значениям результатов. По количеству арифметических операций алгоритмы, реализующие вычисления по каждой из этих формул, практически эквивалентны.

В 1969 г. автор настоящей статьи, используя аппарат векторной алгебры, повторил выводы Ф. А. Слудского и Ф. Р. Гельмерта, касающиеся выражения для тангенса (котангенса) азимута прямого нормального сечения. Решение ав-

тора было представлено в форме отношения модуля векторного произведения двух векторов (касательного к параллели и ортогонального к плоскости нормального сечения) к скалярному произведению тех же векторов [17]. Компоненты векторов были представлены как функции прямоугольных геоцентрических координат  $X, Y, Z$  [12].

Ранее Ф. А. Слудский и Ф. Р. Гельмерт переходили к своим вариантам формулы азимута в системе геодезических криволинейных координат  $B$  и  $L$ , а автор перешел к построению уравнения плоскости прямого нормального сечения, идущего под известным азимутом этого сечения, что привело его к решению выше указанной задачи [1, 2].

**Векторное решение задачи нахождения азимута кривой  
нормального сечения земного сфероида,  
проходящего через две точки**

Решение, представляемое в данной статье, будет полностью опираться на систему прямоугольных пространственных координат, которая занимает доминирующее положение в спутниковых технологиях координирования пространства.

В качестве земного сфероида будет использоваться сжатый вдоль оси вращения двухосный эллипсоид, большая полуось которого  $a$  принимается за единицу длины. Естественно, что у этого эллипсоида полагаются известными числовые значения и других его параметров. В качестве таковых мы будем использовать первый  $e$  и второй  $e'$  эксцентриситеты меридианного эллипса [14]. Меридианный эллипс, его элементы и их соотношения определены и изучены очень хорошо, в связи с чем, дублировать эту информацию излишне. При необходимости мы будем пользоваться требуемыми соотношениями согласно монографии В. Н. Ганьшина [14].

При решении геодезических задач по нормальным сечениям как пространственным линиям [18], образующимся при сечении поверхности земного сфероида  $E$  некоторой нормальной плоскостью  $Q$ , уравнения этих геометрических объектов (в общем случае в форме неявных уравнений в системе прямоугольных декартовых координат  $x, y, z$ ) будут иметь вид

$$\left. \begin{aligned} E(x, y, z) &= 0 \\ Q(x, y, z) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Систему пространственных декартовых геоцентрических координат  $x, y, z$ , в которой большая полуось  $a$  земного сфероида принимается за безразмерную единицу, будем называть в контексте данной статьи **унитарной декартовой системой координат**. Связь унитарных координат  $x, y, z$  с поверхностными криволинейными геодезическими координатами – широтой  $B$  и долготой  $L$  – определяется следующими соотношениями, в которых отражена их

связь с общеизвестными прямоугольными геоцентрическими координатами  $X, Y, Z$  [1]:

$$\left. \begin{aligned} x &= N \cdot \cos B \cdot \cos L = X / a \\ y &= N \cdot \cos B \cdot \sin L = Y / a \\ z &= N \cdot (1 - e^2) \cdot \sin B = Z / a \end{aligned} \right\}. \quad (2)$$

Здесь  $N = 1 / W$  – безразмерный радиус кривизны первого вертикала, выраженный в единицах большой полуоси  $a$ ;  $W$  – первая функция геодезической широты  $B$ ;  $e$  – первый эксцентриситет меридианного эллипса [5]. Функция  $W$  широты  $B$  точки  $P(x, y, z)$ , может быть представлена и как функция аппликаты  $z$  той же точки

$$W = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B} = 1 / \sqrt{1 + e^2 \varepsilon^2 z^2}, \quad (3)$$

где  $\varepsilon$  – функция второго эксцентриситета  $e'$ , которая имеет следующее числовое значение (эллипсоид Ф. Н. Красовского):

$$\varepsilon = 1 + e'^2 = (1 - e^2)^{-1} \approx 1,006\,738\,525\,415. \quad (4)$$

В системе координат (2) каноническое неявное уравнение эллипсоида вращения  $E(x, y, z) = 0$  имеет вид

$$E = x^2 + y^2 + \varepsilon z^2 - 1 = \bar{\rho}^2 + e'^2 z^2 - 1 = 0, \quad (5)$$

где

$$\bar{\rho} = x \cdot \bar{i} + y \cdot \bar{j} + z \cdot \bar{k} \quad (6)$$

– текущий радиус-вектор некоторой точки  $P$  (см. рис. 1).

Определим группу векторов, с помощью которых будет решена поставленная задача нахождения азимута нормального сечения, прямого в одной из своих крайних точек, в системе координат (2).

Орт нормали  $\bar{n}$  к поверхности эллипсоида  $E$  (5) является вектором градиента к ней в некоторой точке  $P$  [18]

$$\bar{n} = \bar{N} \cdot W = (x \cdot \bar{i} + y \cdot \bar{j} + \varepsilon z \cdot \bar{k}) \cdot W. \quad (7)$$

На рис. 2 изображены: поверхность эллипсоида вращения  $E$ ; плоскость меридиана  $M_1$ , проходящего через точку  $P_1$ ; нормальная плоскость  $Q_1$ , прямая в точке  $P_1$  и проходящая через вторую точку  $P_2$ ; плоскость  $T_1$ , касательная к поверхности эллипсоида  $E$  в точке  $P_1$ ; орт нормали  $\bar{n}_1$  к поверхности эллипсоида  $E$  в точке  $P_1$ ; орты, лежащие в плоскости  $T_1$ , исходящие из точки  $P_1$  и касательные к меридиану –  $\bar{m}_1$ , к параллели –  $\bar{l}_1$ , к кривой  $\Gamma$  нормального сечения –  $\bar{t}_1$  и орт  $\bar{q}_1$ , перпендикулярный плоскости нормального сечения  $Q_1$ .

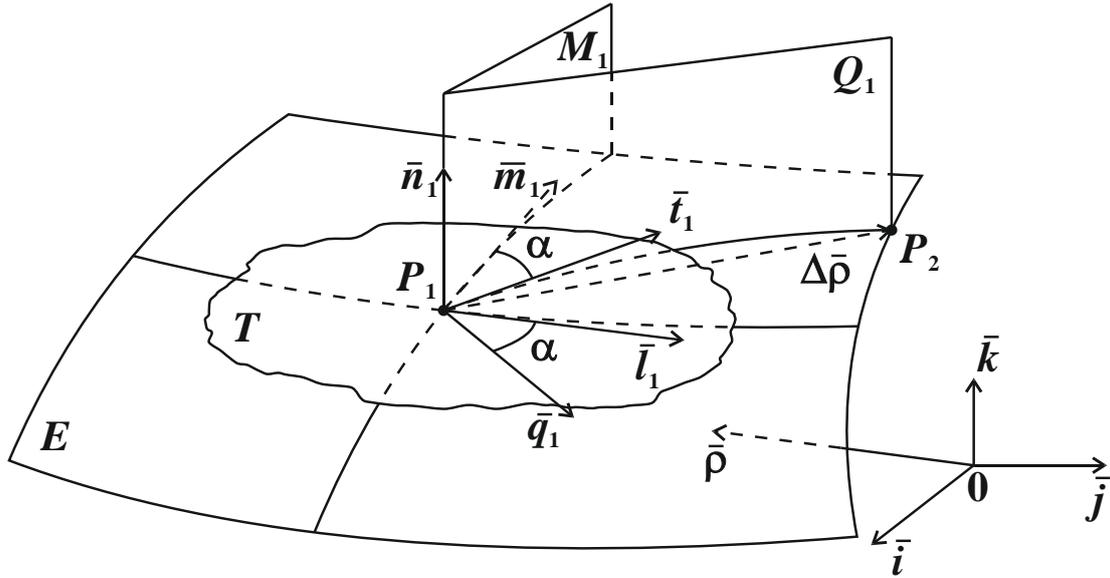


Рис. 2. Фрагмент поверхности земного сфероида  $E$

Опустив детали выкладок, представим векторные и координатные выражения плоскостей, ортов и векторов, изображенных на этом рисунке.

Плоскость меридиана –

$$M_1 = \bar{\rho} \cdot \bar{k} \times \bar{n}_1 = (-y_1 \cdot x + x_1 \cdot y) \cdot W_1 = 0. \quad (8)$$

Орт, касательный к параллели, –

$$\bar{l}_1 = \bar{k} \times \bar{n}_1 = (-y_1 \cdot \bar{i} + x_1 \cdot \bar{j}) / r_1, \quad (9)$$

где  $r_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$  – радиус параллели в точке  $P_1$ .

Орт, касательный к меридиану, –

$$\bar{m}_1 = \bar{n}_1 \times \bar{l}_1 = W_1 \cdot [-x_1 \cdot \varepsilon z_1 / r_1 \cdot \bar{i} - y_1 \cdot \varepsilon z_1 / r_1 \cdot \bar{j} + r_1 \cdot \bar{k}]. \quad (10)$$

Орт, касательный к кривой  $\Gamma$  нормального сечения и составляющий с ортом меридиана  $\bar{m}_1$  угол  $\alpha_1$ :

$$\bar{t}_1 = \bar{t}_\alpha = \begin{pmatrix} (-x_1 \cdot \varepsilon z_1 \cdot W_1 \cdot \cos \alpha_1 - y_1 \cdot \sin \alpha_1) / r_1 \cdot \bar{i} + \\ + (-y_1 \cdot \varepsilon z_1 \cdot W_1 \cdot \cos \alpha_1 + x_1 \cdot \sin \alpha_1) / r_1 \cdot \bar{j} + \\ + W_1 \cdot r_1 \cdot \cos \alpha_1 \cdot \bar{k} \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Нормальная плоскость, прямая в точке  $P_1$ , идущая под азимутом  $\alpha_1$ :

$$Q_1 = (\bar{\rho} - \bar{\rho}_1) \cdot \bar{t}_1 \times \bar{n}_1 = (\bar{\rho} - \bar{\rho}_1) \cdot \bar{q}_1 = 0. \quad (12)$$

Нормальная плоскость, прямая в точке  $P_1$  и проходящая через точку  $P_2$  (обратная геодезическая задача; азимут  $\alpha_1$  является одной из искомым величин):

$$Q_1 = (\bar{\rho} - \bar{\rho}_1) \cdot (\bar{\rho}_2 - \bar{\rho}_1) \times \bar{N}_1 = (\bar{\rho} - \bar{\rho}_1) \cdot \bar{s}_1 = 0. \quad (13)$$

Орт, перпендикулярный плоскости нормального сечения, для случая прямой геодезической задачи (ПГЗ):

$$\bar{q}_1 = \begin{pmatrix} (\varepsilon z_1 \cdot x_1 \cdot W_1 \cdot \sin \alpha_1 - y_1 \cdot \cos \alpha_1) / r_1 \cdot \bar{i} + \\ + (\varepsilon z_1 \cdot y_1 \cdot W_1 \cdot \sin \alpha_1 + x_1 \cdot \cos \alpha_1) / r_1 \cdot \bar{j} - \\ - r_1 \cdot W_1 \cdot \sin \alpha_1 \cdot \bar{k} \end{pmatrix} = u_1 \cdot \bar{i} + v_1 \cdot \bar{j} + w_1 \cdot \bar{k}. \quad (14)$$

Вектор, перпендикулярный плоскости нормального сечения, для случая обратной геодезической задачи (ОГЗ):

$$\begin{aligned} \bar{s}_1 = s_{1x} \cdot \bar{i} + s_{1y} \cdot \bar{j} + s_{1z} \cdot \bar{k} = (\Delta y \cdot \varepsilon z_1 - \Delta z \cdot y_1) \cdot \bar{i} + \\ + (-\Delta x \cdot \varepsilon z_1 + \Delta z \cdot x_1) \cdot \bar{j} + (\Delta x \cdot y_1 - \Delta y \cdot x_1) \cdot \bar{k}. \end{aligned} \quad (15)$$

Используя результаты (8)–(15), мы легко получим формулы для вычисления азимута  $\alpha_1$  нормального сечения, прямого в точке  $P_1$ , проходящего через вторую точку этого сечения  $P_2$ . Искомый азимут  $\alpha_1$  есть угол, образованный на поверхности сфероид ортами, касательными к меридиану ( $\bar{m}_1$ ) и кривой  $\Gamma$  нормального сечения ( $\bar{t}_1$ ) в этой точке (см. рис. 2). С другой стороны, угол  $\alpha_1$  между касательными ортами  $\bar{m}_1$  (10) и  $\bar{t}_1$  (11) равен углу между ортогональным к  $\bar{m}_1$  ортом  $\bar{l}_1$  (9), касательным к параллели в точке  $P_1$ , и ортогональным к орту  $\bar{t}_1$  вектором  $\bar{s}_1$  (15), перпендикулярным плоскости нормального сечения  $Q_1$ , прямого в той же точке  $P_1$  и проходящего через вторую точку  $P_2$ . Искомый азимут  $\alpha_1$  будет равен арккосинусу их скалярного произведения, деленного на модуль вектора  $\bar{s}_1$

$$\alpha_1 = \arccos[(\bar{l}_1 \cdot \bar{s}_1) / s_1], \quad (16)$$

где

$$|\bar{s}_1| = s_1 = \sqrt{s_{1x}^2 + s_{1y}^2 + s_{1z}^2}. \quad (17)$$

В качестве иллюстрации работы формулы (16) ниже приводится пример вычисления двух азимутов прямых нормальных сечений в системе унитарных декартовых геоцентрических координат, выполненный в среде Excel и представленный на рис. 3, 4.

Геоцентрические унитарные ( $\alpha = 1$ ) координаты			Хорды		
	$P_1$	$P_2$	$P$	$\Delta_1$	$\Delta_2$
$x = N \cos B \cos L$	0,217218309	0,113355001	0,118640339	-0,09857797	0,00528534
$y = N \cos B \sin L$	0,596802398	0,556043852	0,672842800	0,07604040	0,11679895
$z = N(1-e^2) \sin B$	0,769837334	0,820626570	0,727762363	-0,04207497	-0,09286421
$r = (x^2 + y^2)^{1/2}$	0,635103846	0,567480503	0,6832224848		
<i>Контроль:</i>	1,000000000	1,000000000	1,0000000000		
$\varepsilon = 1+e^2$	1,00673852541468		$\Delta =$	0,13141561	0,14931072
$e^2$	0,006693421623				
$N$	1,0020082309	1,0022816422	1,0017949037		
			0,9982083122	$= W = 1/N$	

Рис. 3. Геоцентрические унитарные координаты опорных ( $P_1$  и  $P_2$ ) и определяемого ( $P$ ) пунктов

Азимуты прямых нормальных сечений $P_1P$ и $P_2P$								
$\alpha = \arccos((l \cdot s) /  s ); l = (-y \cdot i + x \cdot j) / r; s = s_x \cdot i + s_y \cdot j + s_z \cdot k$								
Орт, касательный $l_1$ параллели	-0,9396926			Орт, касательный $l_2$ параллели	-0,9798466			
	0,3420201				0,1997514			
	0				0			
	1,0000000				1,0000000			
Вектор, ортогональный $s_1$ плоскости $P_1P$	0,0840436			Вектор, ортогональный $s_2$ плоскости $P_2P$	0,1481308			
	0,0672609				-0,0148931			
	-0,0753489				-0,0103009			
	0,0172648	$\alpha_1 = (l_1 \wedge s_1)^{mod} = 2,0108299$			0,0222706	$\alpha_2 = (l_2 \wedge s_2)^{mod} = 3,0193767$		
	$ s_1  = 0,1313957$	$\cos \alpha_1 = (l_1 \cdot s_1) /  s_1  = -0,4259698$			$ s_2  = 0,1492335$	$\cos \alpha_2 = (l_2 \cdot s_2) /  s_2  = -0,9925409$		
	115,2120667°	115°	12'	43,44"	172,99754167°	172°	59'	51,15"

Рис. 4. Вычисление азимутов нормальных сечений  $P_1P$  и  $P_2P$  в среде Excel

Азимуты вычислялись для двух направлений  $P_1P$  и  $P_2P$  (см. рис. 1), по которым ранее была решена азимутальная засечка на сфероиде [1, 2], определившая координаты пункта  $P$ . Полученные по формуле (16) значения азимутов  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  направлений  $P_1P$  и  $P_2P$  (см. рис. 4) идентичны тем исходным значениям, по которым был координирован определяемый пункт  $P$ :

$$\alpha_1 = 115^\circ 12' 43,44'';$$

$$\alpha_2 = 172^\circ 59' 51,15''.$$

## Дополнение

Авторы [12, 13], использующие в качестве исходной информации криволинейные геодезические координаты, опирались в своих выводах изначально на уравнения аналитической геометрии в системе пространственных геоцентрических координат  $XYZ$ . В этой системе ими была выведена выше упомянутая формула для тангенса или котангенса азимута нормального сечения, содержащая кроме разностей геоцентрических координат конечных точек еще и множители, равные косинусу и синусу геодезической широты первой точки

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = -\frac{y'_2}{(z'_1 - z'_2)\cos B_1 - (x'_1 - x'_2)\sin B_1}, \quad (18)$$

где  $x'_i, y'_i, z'_i$  – это новые пространственные геоцентрические координаты, ось ординат которых повернута в плоскости  $XOY$  на угол, равный долготе первой точки  $L_1$ . Матричная форма такого поворота осуществляется по следующему известному правилу:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos L_1 & \sin L_1 & 0 \\ -\sin L_1 & \cos L_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}. \quad (19)$$

Поэлементное представление компонентов матриц (19) дает следующие соотношения для преобразованных координат крайних точек  $P_1$  и  $P_2$  нормального сечения:

$$\left. \begin{aligned} x'_1 &= X_1 \cdot \cos L_1 + Y_1 \cdot \sin L_1 \\ y'_1 &= 0 \\ z'_1 &= Z_1 \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

и

$$\left. \begin{aligned} x'_2 &= X_2 \cdot \cos L_1 + Y_2 \cdot \sin L_1 \\ y'_2 &= -X_2 \cdot \sin L_1 + Y_2 \cdot \cos L_1 \\ z'_2 &= Z_2 \end{aligned} \right\}. \quad (21)$$

Получив формулу (18), авторы [12, 13] произвели переход к геодезическим криволинейным координатам  $B$  и  $L$ , а далее применили различные проекции поверхности эллипсоида вращения на сферу. Вычислений по формуле (18) в указанных работах не содержится.

На рис. 5 демонстрируется корректность работы вышеприведенных формул (18)–(21) для тех же азимутов  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  направлений  $P_1P$  и  $P_2P$ .

Азимуты прямых нормальных сечений $P_1P$ и $P_2P$ (поворот на угол $L_i$ )					
$\alpha_i = \arctg(y/((x-x_i) \cdot \sin B_i - (Z-Z_i) \cdot \cos B_i))$ (Служкий и Гельмерт использовали эту ф-лу лишь для перехода к $B$ и $L$ )					
Поворот на угол $L_1$	$P_1$	$P$	Поворот на угол $L_2$	$P_2$	$P$
$x' - x'_1 = 0,03773895$	$x'   0,63510385$	$0,67284280$	$x' - x'_2 = 0,11550081$	$x'   0,56748050$	$0,68298131$
	$y'   0$	$0,11864034$		$y'   0$	$0,01815193$
$Z - Z_1 = -0,04207497$	$Z   0,76983733$	$0,72776236$	$Z - Z_2 = -0,09286421$	$Z   0,82062657$	$0,72776236$
$\sin B_1(x' - x'_1) = 0,02919001$			$\sin B_2(x' - x'_2) = 0,09520451$		
$\cos B_1(Z - Z_1) = -0,02666842$			$\cos B_2(Z - Z_2) = -0,05257866$		
$y' = 0,11864034$			$y' = 0,01815193$		
$\alpha_1 = 1,13076275$			$\alpha_2 = 0,12221595$		
$115,2120667^\circ$	$115^\circ$	$12'$	$43,44''$	$172,99754167^\circ$	$172^\circ$
				$59'$	$51,15''$

Рис. 5. Вычисления азимутов нормальных сечений по формулам (20)–(21)

### Заключение

Формулы для вычисления азимутов нормальных сечений [12–16] предполагают, что крайние точки нормального сечения определены на поверхности земного сфероид в системе криволинейных геодезических координат: широты  $B$  и долготы  $L$ .

Формулы автора в контексте данной статьи и работы [17] предполагают, что положение этих точек известно в системе (2) пространственных прямоугольных координат  $x, y, z$ , которые являются базовыми в современных технологиях спутниковой геолокации.

Открытым остается вопрос об оценке точности вычисленного значения азимута  $\alpha_1$  прямого нормального сечения. Хотя все упоминаемые в статье алгоритмы решают задачу «с точностью до положения в пространстве» по замкнутым формулам, вполне закономерно встает задача определения средней квадратической погрешности (СКП) вычисленного азимута  $\alpha_1$  по известной ковариационной матрице  $K_U$  исходных данных  $U$ .

В общем виде связь искомого азимута  $\alpha_1$  с вектором  $U$  исходных координат представляет собой неявную дифференцируемую функцию  $f$

$$\alpha_1 = f(U). \quad (22)$$

Вектор исходных координат  $U$  состоит из четырех (в первых пяти алгоритмах) или шести (в последнем случае) компонентов.

Квадрат СКП азимута  $\alpha_1$  находится по известной формуле теории погрешностей

$$m_f^2 = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial u_i}\right)^2 m_i^2 + 2 \sum_{i < j} \left(\frac{\partial f}{\partial u_i}\right) \left(\frac{\partial f}{\partial u_j}\right) K_{ij}. \quad (23)$$

Основная проблема применения формулы (23) заключается как в громоздкости исследуемых алгоритмов, так и в сложности получения выражений для частных производных  $\partial f / \partial u_i$  от этих алгоритмов. Числовые значения  $\Delta f / \Delta u_i$  указанных производных могут быть найдены методом численного дифференцирования, и тогда можно будет получить ответ на поставленный вопрос с помощью преобразованной формулы (23)

$$\tilde{m}_f^2 \approx \sum_i \left(\frac{\Delta f}{\Delta u_i}\right)^2 m_i^2 + 2 \sum_{i < j} \left(\frac{\Delta f}{\Delta u_i}\right) \left(\frac{\Delta f}{\Delta u_j}\right) K_{ij}. \quad (24)$$

Последние абзацы намечают одно из возможных направлений дальнейших исследований в этой области сфероидической геодезии.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Падве В. А. Азимутальная засечка на сфероиде // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотоъемка. – 1969. – № 3. – С. 65–68.
2. Падве В. А. Геодезия без ... геодезической (координатизация поверхности эллипсоида вращения по азимутам прямых нормальных сечений) // Вестник СГГА. – 2012. – Вып. 1 (17). – С. 24–28.
3. Телеганов Н. А. Геометрия земного эллипсоида : учеб. пособие по сфероидической геодезии. Ч. 1. – Новосибирск : СГГА, 1995. – 83 с.
4. Телеганов Н. А. Решение геодезических задач на эллипсоиде и конформное отображение эллипсоида на плоскости в проекции Гаусса – Крюгера : учеб. пособие по сфероидической геодезии. Ч. 2. – Новосибирск : СГГА, 1996. – 88 с.
5. Бойко Е. Г. Высшая геодезия. Часть II. Сфероидическая геодезия. – М. : Картгеоцентр – Геодезиздат, 2003. – 144 с.
6. Антонович К. М. Использование спутниковых радионавигационных систем в геодезии : монография. В 2 т. Т. 1. – М. : Картгеоцентр, 2006. – 334 с.
7. Антонович К. М. Использование спутниковых радионавигационных систем в геодезии: монография. В 2 т. Т. 2. – М. : Картгеоцентр, 2006. – 360 с.
8. Елагин А. В. Теория фигуры Земли : учеб. пособие. – Новосибирск : СГГА, 2012. – 174 с.
9. Телеганов Н. А., Елагин А. В. Высшая геодезия и основы координатно-временных систем : учеб. пособие. – Новосибирск : СГГА, 2004. – 238 с.
10. Мазуров Б. Т. Высшая геодезия : учеб. – Новосибирск : СГУГиТ, 2016. – 203 с.
11. Мазуров Б. Т. Математическое моделирование при исследовании геодинамики : монография. – Новосибирск, 2019. – 360 с.
12. Слудский Ф. А. Избранные геодезические труды. – М. : Недра, 1967. – 238 с.
13. Гельмерт Ф. Р. Математические и физические теории высшей геодезии. Т. 1. – М.: «Геодезиздат», 1962. – 407 с.
14. Ганьшин В. Н. Геометрия земного эллипсоида. – М. : Недра, 1967. – 115 с.

15. Краткий топографо-геодезический словарь-справочник / Б. С. Кузьмин, Ф. Я. Герасимов, В. М. Молоканов и др. – М. : Недра, 1967. – 280 с.
16. Проворов К. Л. Плоские сечения эллипсоида // Труды НИИГАиК. – Т. XX. – Новосибирск, 1967. – С. 3–12.
17. Падве В. А. Решение обратной геодезической задачи по нормальным сечениям с помощью ЭЦВМ // Труды НИИГАиК. – Т. XXIII. – Новосибирск, 1969. – С. 87–92.
18. Норден А. П. Краткий курс дифференциальной геометрии. – М. : Физматгиз, 1958. – 374 с.

Получено 31.10.2019

© В. А. Падве, 2020

## AZIMUTHS OF NORMAL SECTION'S CURVE OF SPHEROID IN THE UNITARY CARTESIAN SYSTEM OF GEOCENTRIC COORDINATES

*Vladimir A. Padve*

Siberian State University of Geosystems and Technologies, 10, Plakhotnogo St., Novosibirsk, 630108, Russia, Associate Professor, Department of Applied Information Science and Systems, phone: (383)343-18-53, e-mail: evdapav@mail.ru

The article provides new formulas for calculating the azimuth of the normal section by the coordinates of its endpoints in the unitary Cartesian system of geocentric coordinates. The solution is made with using the vector algebra. Existing formulas for calculating the azimuth of the normal section by the coordinates of its endpoints are present in the system of curved geodetic coordinates – latitude and longitude of these points. The proposed vector formulas, as well as already known in the system of curved coordinates, solve the problem with precision “to the position in space”. In terms of computation, all solutions are almost equivalent.

Obtaining formulas in the unitary Cartesian system of geocentric coordinates initiated by the fact that in solving geosatellite problems such coordinates are basic.

**Key words:** cartesian system of geocentric coordinates, vector of the unit length of the gradient, tangent vector of the unit length, normal plane.

### REFERENCES

1. Padve, V. A. (1969). Azimuthal intersection on the spheroid. *Izvestiya vusov. Geodezia I aerofotos'emka [Izvestiya vusov. Geodesy and Aerophotography]*, 3, 65–68 [in Russian].
2. Padve, V. A. (2002). The geodesy to go without ... geodesic line (coordinatization of the ellipsoid of rotation surface by the direct normal section azimuths). *Vestnik SSGA [Vestnik SSGA]*, 1(17), 24–28 [in Russian].
3. Teleganov, N. A. (1995). *Geometriya zemnogo ellipsoida: Uchebnoe posobie po sferoidicheskoy geodezii. Ch. 1 [Geometry of the Earth's ellipsoid: A textbook on spheroidal geodesy. Ch. 1]*. Novosibirsk: SSGA Publ. 83 p. [in Russian].
4. Teleganov, N. A. (1996). *Reshenie geodezicheskikh zadach na ellipsoide i konformnoe otobrazhenie ellipsoida na ploskosti v proektsii Gaussa-Kryugera : uchebnoe posobie po sferoidicheskoy geodezii. Ch. 2 [Solving geodesic problems on the ellipsoid and conformal mapping of the ellipsoid on the plane in the Gauss-Kruger projection: A tutorial on spheroid geodesy. Ch. 2]*. Novosibirsk: SSGA Publ., 88 p. [in Russian].

5. Boyko, E. G. (2003). *Vysshaya geodeziya. Chast' II. Sferoidicheskaya geodeziya [Higher Geodesy. Part II. Spheroidal geodesia]*. Moscow: "Cartgeocenter" – "Geodesizdat" Publ., 144 p. [in Russian].
6. Antonovich, K. M. (2006). *Ispol'zovanie sputnikovykh radionavigatsionnykh sistem v geodezii: T. 1 [Use of satellite radio navigation systems in geodesy: T. 1]*. Moscow: Cartgeocenter, Publ., 334 p. [in Russian].
7. Antonovich, K. M. (2006). *Ispol'zovanie sputnikovykh radionavigatsionnykh sistem v geodezii: T. 2 [Use of satellite radio navigation systems in geodesy: T. 2]*. Moscow: Cartgeocenter Publ., 360 p. [in Russian].
8. Yelagin A. V. (2012). *Teoriya figury Zemli [Earth Figure Theory]*. Novosibirsk: SSGA Publ., 174 p. [in Russian].
9. Teleganov, N. A., & Yelagin, A. V. (2004). *Vysshaya geodeziya i osnovy koordinatno-vremennykh system [Higher geodesy and the basics of coordinate-time systems]*. Novosibirsk: SSGA Publ., 238 p. [in Russian].
10. Mazurov, B. T. (2016). *Vysshaya geodeziya [Higher Geodesy]*. Novosibirsk^ SSUGT Publ., 203 p. [in Russian].
11. Mazurov, B. T. (2019). *Matematicheskoe modelirovanie pri issledovanii geodinamiki [Mathematical modeling in the study of geodynamics]*. Novosibirsk, 360 p. [in Russian].
12. Sludsky, F. A. (1967). *Izbrannye geodezicheskie trudy [Selected geodetic works]*. Moscow: Nedra Publ., 238 p. [in Russian].
13. Helmert, F. R. (1962). *Matematicheskie i fizicheskie teorii vysshey geodezii. T. 1 [Mathematical and physical theories of higher geodesy. Vol. 1]*. Moscow: Geodesizdat Publ., 407 p. [in Russian].
14. Ganshin, V. N. (1967). *Geometriya zemnogo ellipsoida [Geometry of the Earth's ellipsoid]*. Moscow: Nedra Publ., 115 p. [in Russian].
15. Kuzmin, B. S., Gerasimov, F. Y., Molokanov, V. M., & etc. (1967). *Kratkiy topografo-geodezicheskiy slovar'-spravochnik [A brief topographical-geodesic dictionary-reference]*. Moscow: Nedra Publ., 280 p. [in Russian].
16. Provorov, K. L. (1967). Flat sections of the ellipsoid. *Works NIIGA&K [Works NIIGA&K]*, XX, 3–12 [in Russian].
17. Padve, V. A. (1969). Solution of the reverse geodetic problem on normal sections with help of ECM. *Works NIIGA&K [Works NIIGA&K]*, XXIII, 87–92 [in Russian].
18. Norden, A. P. (1958). *Kratkiy kurs differentsial'noy geometrii [Brief Course of Differential Geometry]*. Moscow: Fizmatgiz Publ., 374 p. [in Russian].

Received 31.10.2019

© V. A. Padve, 2020