



УДК 53.145.61

DOI: 10.33764/2411-1759-2019-24-2-198-219

## ИССЛЕДОВАНИЕ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЁДИНГЕРА

*Павел Александрович Карпик*

Новосибирский государственный университет, 630090, Новосибирск, ул. Пирогова, 1, обучающийся, тел. (983)319-08-09, e-mail: karpikpavel@yandex.ru

В работе исследуется сравнительная эффективность различных численных методов решения нелинейного уравнения Шрёдингера (НУШ). В дополнение к таким общеизвестным методам, как явный и неявный методы, схема Кранка – Николсон, а также метод Фурье разделения по физическим факторам, рассматривается ряд новых компактных разностных схем. Проводятся анализ и сравнение методов в двух различных метриках. Для расчетов, помимо стандартного в подобного рода исследованиях аналитического решения в виде солитона, были выбраны сигналы, используемые для передачи информации по оптическому волокну, с форматом модуляции 16QAM, также были построены и использованы для сравнения схем точные потенциалы, полученные путем решения обратной и прямой задач Захарова – Шабата для безотражательного потенциала.

**Ключевые слова:** численные методы, нелинейное уравнение Шрёдингера, компактные разностные схемы, сигналы с форматом модуляции 16QAM, безотражательный потенциал, прямая и обратная задачи Захарова – Шабата.

### *Введение*

Нелинейное уравнение Шрёдингера широко используется для математического моделирования распространения оптического импульса по световоду. В наиболее известной форме уравнение представляется следующим образом [1]:

$$iA_z = \frac{\beta_2}{2} A_{tt} - \gamma |A|^2 A, \quad (1)$$

где  $A \in \mathbb{C}$  – огибающая импульса, параметры  $\beta_2$  (дисперсия групповых скоростей) и  $\gamma > 0$  (показатель нелинейности) определяются моделируемой системой. Для удобства расчетов уравнение (1) записывается в безразмерном виде:

$$iu_\zeta = \operatorname{sgn}(\beta_2) \frac{1}{2} u_{\tau\tau} - N^2 |u|^2 u, \quad (2)$$

с помощью замены переменных:  $u = \frac{A}{\sqrt{P_0}}$ ,  $\zeta = \frac{z}{L_D}$ ,  $\tau = \frac{T}{T_0}$ . Здесь  $L_D = \frac{T_0^2}{\beta_2}$  – показатель дисперсионной длины,  $P_0$  – пиковая мощность, параметр  $N^2$  определяется как отношение дисперсионной к нелинейной длине:  $N^2 = \frac{L_D}{L_{NL}}$ . В статье рассматривается случай аномальной дисперсии  $\text{sgn}(\beta_2) = -1$ . С помощью еще одного преобразования  $U = Nu$  (2) приводится к виду:

$$iU_\zeta = -\frac{1}{2}U_{\tau\tau} - |U|^2 U. \quad (3)$$

Используя данную форму уравнения (1), В. Е. Захаров и А. Б. Шабат получили класс точных аналитических решений, именуемых солитонами [1]. Одно из таких решений, а именно – фундаментальный солитон

$$U(\zeta, \tau) = e^{i\frac{\zeta}{2}} \text{sech } \tau \quad (4)$$

– будет рассмотрено в ходе дальнейшего изложения.

Для моделирования передачи информации по волокну применяется в основном Split Step Fourier Method (SSFM) – Фурье-метод расщепления по физическим факторам, он же используется как стандартный в большинстве пакетов программ. SSFM имеет хорошую точность, но с алгоритмической сложностью на временном слое  $O(N \log N)$ . В связи с этим интерес представляет изучение вопроса о применимости конечно-разностных, в частности, компактных схем для расчета реальных оптоволоконных линий связи, так как из-за экономичной реализации и возможности распараллеливания время выполнения программы при большом числе точек по времени для таких схем будет значительно ниже, чем у SSFM.

### Теоретическое исследование методов

Приведем список обозначений, принятых для упрощения хода изложения:

1) оператор  $\Delta_+ u^n = \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta\zeta}$ ;

2)  $\Delta u^n = \frac{u^{n+1} - u^{n-1}}{2\Delta\zeta}$ ;

3)  $\Lambda u_j = \frac{u_{j-1} - 2u_j + u_{j+1}}{\Delta\tau^2}$ ;

4)  $F, F^{-1}$  – прямое и обратное дискретные преобразования Фурье;

5)  $f_j^n = -N^2 |u_j^n|^2 u_j^n$ .

В ходе первого этапа работы было выбрано несколько методов, проведен анализ устойчивости соответствующих схем для линейного уравнения

$$iu_{\zeta} = -\frac{1}{2}u_{\tau\tau}, \quad (5)$$

также была подтверждена теоретическая оценка точности.

1. Явная схема (схема Рундсона) [2]

$$i\Delta u_j^n = -\frac{1}{2}\Lambda u_j^n + f_j^n \quad (6)$$

условно устойчива ( $\Delta\zeta / \Delta\tau^2 \leq 1/4$ ), аппроксимирует точное решение с погрешностью  $O(\Delta\zeta^2 + \Delta\tau^2)$ .

2. Неявная схема [2]

$$i\Delta_+ u_j^n = -\frac{1}{4}\Lambda(u_j^n + u_j^{n+1}) + \frac{1}{2}(f_{j-1}^n + f_{j+1}^n) \quad (7)$$

абсолютно устойчива, аппроксимирует с точностью  $O(\Delta\zeta + \Delta\tau^2)$ .

3. SSFM (Split Step Fourier Method) [2]:

$$u(\zeta^n, \tau_j) = e^{-\frac{1}{2}\Delta\zeta N} \left( \prod_{i=1}^n e^{\Delta\zeta N} e^{\Delta\zeta D} \right) e^{\frac{1}{2}\Delta\zeta N} u(0, \tau_j), \quad (8)$$

где  $N = iN^2 |u_j^n|^2$ ,  $D = i\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}$ , может быть вычислен с помощью перехода в

пространство Фурье  $(F^{-1}(e^{\frac{1}{2}\Delta\zeta i^2 \omega^2})Fu(\zeta, \cdot))$ . Метод абсолютно устойчив, аппроксимирует с точностью  $O(\Delta\zeta^2 + \Delta\tau^\infty)$ .

4. Схема Кранка – Николсон [2]:

$$i\Delta_+ u_j^n = -\frac{1}{4}\Lambda(u_j^n + u_j^{n+1}) + \frac{1}{2}(f_j^n + f_j^{n+1}) \quad (9)$$

абсолютно устойчива, аппроксимирует с точностью  $O(\Delta\zeta^2 + \Delta\tau^2)$ .

5. Схема восьмого порядка точности [3] абсолютно устойчива, в том числе доказана теоретическая устойчивость для нелинейной схемы, погрешность составляет  $O(\Delta\zeta^2 + \Delta\tau^8)$ .

6. Схема М. П. Федорука и В. И. Паасонена (итерационная) [4]:

$$i\Delta_+ u_j^n = -\frac{1}{2}\Lambda(\alpha u_j^{n+1} + (1-\alpha)u_j^n) + \frac{1}{2}(f_j^n + f_j^{n+1}) + \frac{\Delta\tau^2}{12}\Lambda f_j^n, \quad (10)$$

где  $\alpha = \frac{1}{2} + \frac{i\Delta\tau^2}{6\Delta\zeta} + c\Delta\zeta$  ( $c > 0$ ). Схема абсолютно устойчива, аппроксимирует с точностью  $O(\Delta\zeta^2 + \Delta\tau^4)$ .

7. Схема М. П. Федорука и В. И. Паасонена (безытерационная) [4]:

$$i\Delta u_j^n = -\frac{1}{2}\Lambda(\alpha u_j^{n+1} + (1-\alpha)u_j^{n-1}) + f_j^n + \frac{\Delta\tau^2}{12}\Lambda f_j^n, \quad (11)$$

где  $\alpha = \frac{1}{2} + \frac{i\Delta\tau^2}{12\Delta\zeta} + 2c\Delta\zeta$  ( $c > 0$ ). Схема абсолютно устойчива, аппроксимирует с точностью  $O(\Delta\zeta^2 + \Delta\tau^4)$ .

Далее методы проверялись на фундаментальном солитоне (4). Полученные результаты о порядке сходимости согласуются с теоретическими оценками точности и расчетами, проведенными в работах [2–5].

### Сравнение методов на фундаментальном солитоне

Оператор уравнения (3) аппроксимируется спектральным и конечно-разностными операторами, список которых приведен выше. Для исследования отклонения численного решения от точного вводится критерий, определяемый количеством точек по пространству и времени и затраченным временем работы при заданной точности. Схемы рассматриваются при увеличении количества узлов по эволюционной переменной в два раза – это обусловлено тем, что в пакетах моделирования линий связи для количества точек по пространству используется степень двойки.

Для проведения тестов был разработан комплекс программ, оптимизированный с использованием библиотеки Intel MKL, что позволило сократить время работы исследуемых методов. Схемы, в которых применяется метод прогонки, были реализованы с помощью библиотечных функций факторизации матриц и решения трехдиагональной системы уравнений. Также использовались быстрое обратное и прямое преобразования Фурье, во всех программах применялись процедуры умножения массивов на скаляр и их копирования.

Расчеты проводились при фиксированных  $L = 5$  длине по  $\zeta$  и ширине расчетной области, равной 60, время выбиралось среднее медианное из 11 запусков. Результаты расчетов приведены ниже в табл. 1–3. Указаны значения параметров, при которых впервые был преодолен порог требуемой точности  $\varepsilon$  ( $Error \leq \varepsilon$ ,

где  $Error = \sqrt{\frac{1}{Nt} \sum_{i=1}^{Nt} |(u)_i - u_i|^2}$ ), для погрешностей  $\varepsilon = 0,1$ ;  $\varepsilon = 0,01$  и  $\varepsilon = 0,001$ .

Таблица 1

Сравнение методов с порогом требуемой точности  $\varepsilon = 0,1$ 

Метод	$Nt$	$Nz$	$Error, \varepsilon = 0,1$	Время
Явная схема	64	10	0,098 695 3	0,000 014
Неявная схема	128	20	0,064 734 5	0,000 14
SSFM	64	5	0,061 346 45	0,000 08
Схема Федорука – Паасонена	64	20	0,035 502 5	0,000 258
Схема Федорука – Паасонена (безытерационная)	64	20	0,001 079 445	0,000 104
Схема Кранка – Николсон	64	30	0,065 882 6	0,000 397
Схема восьмого порядка точности	64	20	0,027 110 28	0,000 589

Таблица 2

Сравнение методов с порогом требуемой точности  $\varepsilon = 0,01$ 

Метод	$Nt$	$Nz$	$Error, \varepsilon = 0,01$	Время
Явная схема	256	200	0,005 570 154	0,001 906
Неявная схема	512	200	0,009 675 473	0,008 981
SSFM	128	20	0,005 315 288	0,000 232
Схема Федорука – Паасонена	64	100	0,009 908 44	0,002 816
Схема Федорука – Паасонена (безытерационная)	64	20	0,001 079 445	0,000 104
Схема Кранка – Николсон	256	70	0,009 013 531	0,003 661
Схема восьмого порядка точности	128	50	0,007 142 356	0,004 566 6

Таблица 3

Сравнение методов с порогом требуемой точности  $\varepsilon = 0,001$ 

Метод	$Nt$	$Nz$	$Error, \varepsilon = 0,001$	Время
Явная схема	1 024	3 000	0,000 330 360 7	0,114 563
Неявная схема	1 024	1 280	0,000 876 633 4	0,072 156
SSFM	128	50	0,000 869 354	0,000 758
Схема Федорука – Паасонена	128	80	0,000 530 193 7	0,003 038
Схема Федорука – Паасонена (безытерационная)	256	70	0,000 879 863 1	0,001 964
Схема Кранка – Николсон	1 024	80	0,000 167 726 8	0,014 744
Схема восьмого порядка точности	128	80	0,000 164 867 9	0,007 146

В табл. 1–3:  $Nz$  – количество точек по пространству;  $Nt$  – количество точек по временной оси;  $Error$  – среднеквадратичное отклонение численного решения от солитона (4); время измеряется в секундах.

Методы, явно уступающие остальным в точности и времени расчета, были исключены из дальнейшего рассмотрения: явная схема, которая к тому же имеет условную устойчивость ( $\Delta\zeta / \Delta\tau^2 \leq 1/4$ ), неявная схема и схема Кранка – Николсон. Также из двух схем Федорука – Паасонена была выбрана безытерационная, так как время работы данной схемы в разы меньше, чем схемы с итерациями; более того, скорость сходимости итераций, вообще говоря, сильно зависит от начального распределения.

### **Безотражательный потенциал. Сравнение методов на аналитических решениях**

Рассмотрим уравнение

$$iU_\zeta = -U_{\tau\tau} - 2|U|^2 U, \quad (12)$$

полученное из (3) заменой  $\zeta \rightarrow 2\zeta$ . Используя теорию обратной задачи рассеяния [1] в случае безотражательного потенциала для двух и трех дискретных собственных значений системы Захарова – Шабата [1], получим семейства точных решений уравнения (12). Имеем:

$$U(\zeta, \tau) = \frac{4(\eta_1^2 - \eta_2^2) \left( \eta_1 e^{-4i\zeta\eta_1^2} \operatorname{ch}(2\eta_2\tau) + \eta_2 e^{-4i\zeta\eta_2^2} \operatorname{ch}(2\eta_1\tau) \right)}{(\eta_1 - \eta_2)^2 \operatorname{ch}(2\eta_3\tau) + \eta_3^2 \operatorname{ch}(2(\eta_1 - \eta_2)\tau) + 4\eta_1\eta_2 \cos\left(4\zeta(\eta_1^2 - \eta_2^2)\right)}, \quad (13)$$

где  $\eta_k = \operatorname{Im}(\kappa_k) = -i\kappa_k > 0$ ,  $k = 1, 2$ ,  $\eta_3 = \eta_1 + \eta_2$ , а  $\kappa_k$  – дискретные собственные значения. Взяв  $\eta_1 = \frac{3}{2}$ ,  $\eta_2 = \frac{1}{2}$ , мы получим классический результат – солитон второго порядка, для которого начальное распределение имеет вид  $2\operatorname{sech} \tau$ , что согласуется с работой [6]. Более того, беря в качестве начальных данных  $A\operatorname{sech}(\tau / \delta)$  и решая прямую задачу Захарова – Шабата [1], найдем выражения для собственных значений  $\delta\kappa_k = i\left(A\delta + \frac{1}{2} - k\right)$ ,  $\operatorname{Im}(\kappa_k) > 0$ , при этом для  $A\delta = 2$  мы получаем однопараметрическое семейство решений с безотражательным потенциалом, т. е. таких решений, что выполнено  $U(0, \tau) = A\operatorname{sech}(\tau / \delta)$ .

Во время работы также удалось получить аналитическое представление потенциала для случая трех произвольных дискретных собственных значений. Выражение довольно громоздко, и, в целях упрощения, ниже представлено ча-

стное решение: выбирая в качестве начальных данных  $Zsecht$  и решая прямую задачу, мы найдем:

$$\begin{aligned}
 U(\zeta, \tau) = & 12(2e^{-4i\zeta} (\text{ch}(10\tau) + 25\text{ch}(2\tau)) + 10e^{-16i\zeta} (\text{ch}(8\tau) + 4\text{ch}(4\tau)) + \\
 & + 10e^{-36i\zeta} (\text{ch}(6\tau) + 9\text{ch}(2\tau)) + (9e^{16i\zeta} + 64e^{-24i\zeta} + \\
 & + 25e^{-48i\zeta})) / (288 \cos(20\zeta) \text{ch}(2\tau) + 45(2 \cos(32\zeta) + 5) \text{ch}(4\tau) + \\
 & + 160 \cos(12\zeta) \text{ch}(6\tau) + 36\text{ch}(8\tau) + \text{ch}(12\tau) + 100).
 \end{aligned}
 \tag{14}$$

Сравнение методов будет проводиться на солитонах второго и третьего порядков, а также на решении (13) с  $\eta_1 = 2$ ,  $\eta_2 = 1$ , распространяющихся на расстояние  $L = 5$  при ширине расчетной области, равной 120.

Ошибка вычислялась по формуле  $Error = \sqrt{\frac{1}{Nt} \sum_{i=1}^{Nt} |(u)_i - u_i|^2}$ ;  $Nz$  – количество точек по пространству;  $Nt$  – количество точек по временной оси; время выбиралось среднее медианное из 11 запусков. Результаты расчетов представлены на рис. 1–14.

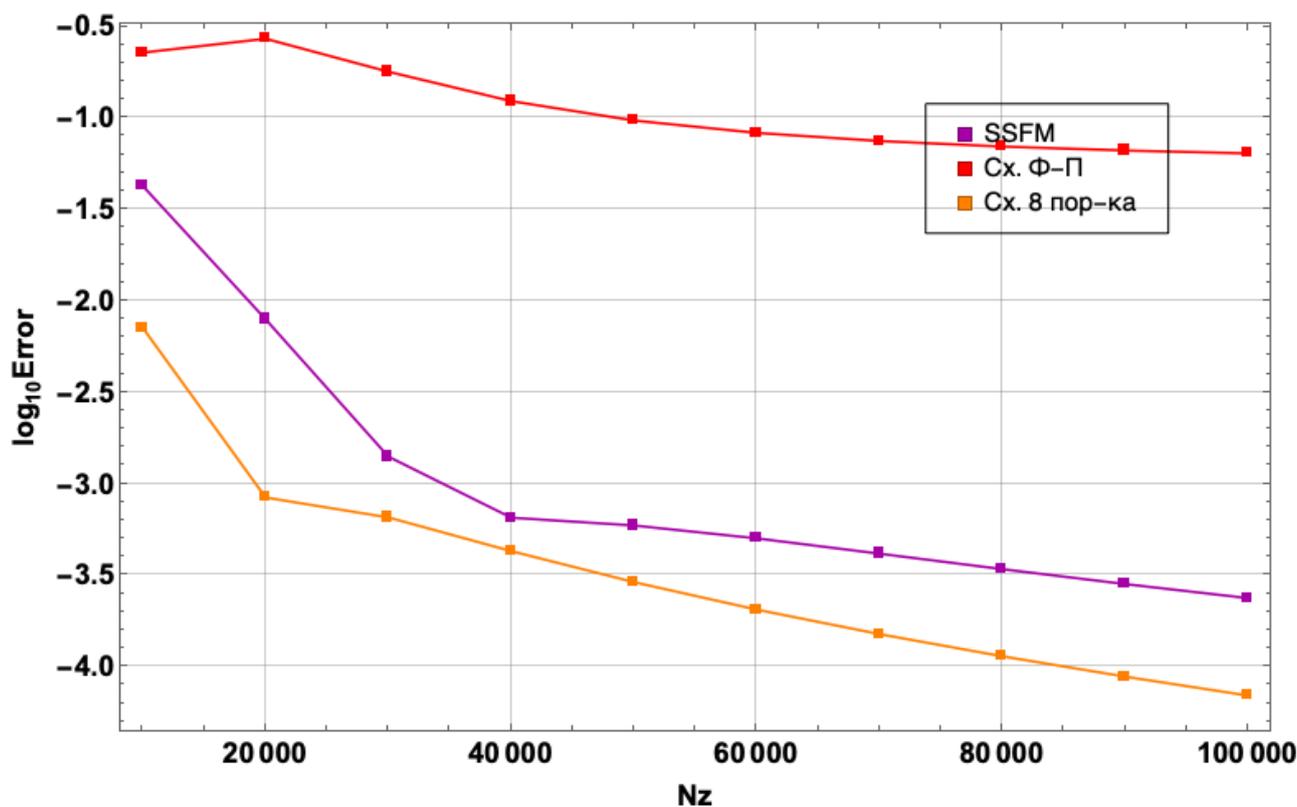


Рис. 1. Результаты расчетов солитона третьего порядка при фиксированном количестве точек по временной оси  $Nt = 4\ 096$

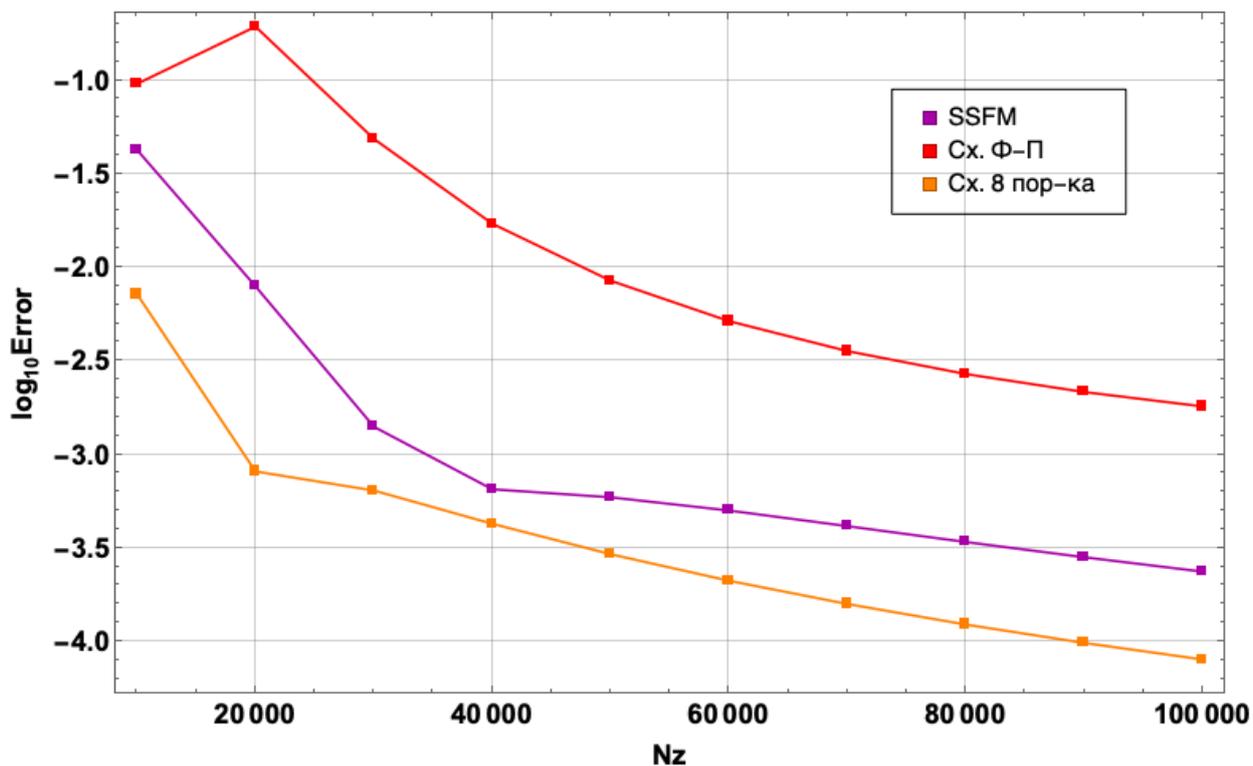


Рис. 2. Результаты расчетов солитона третьего порядка при фиксированном количестве точек по временной оси  $Nt = 8192$

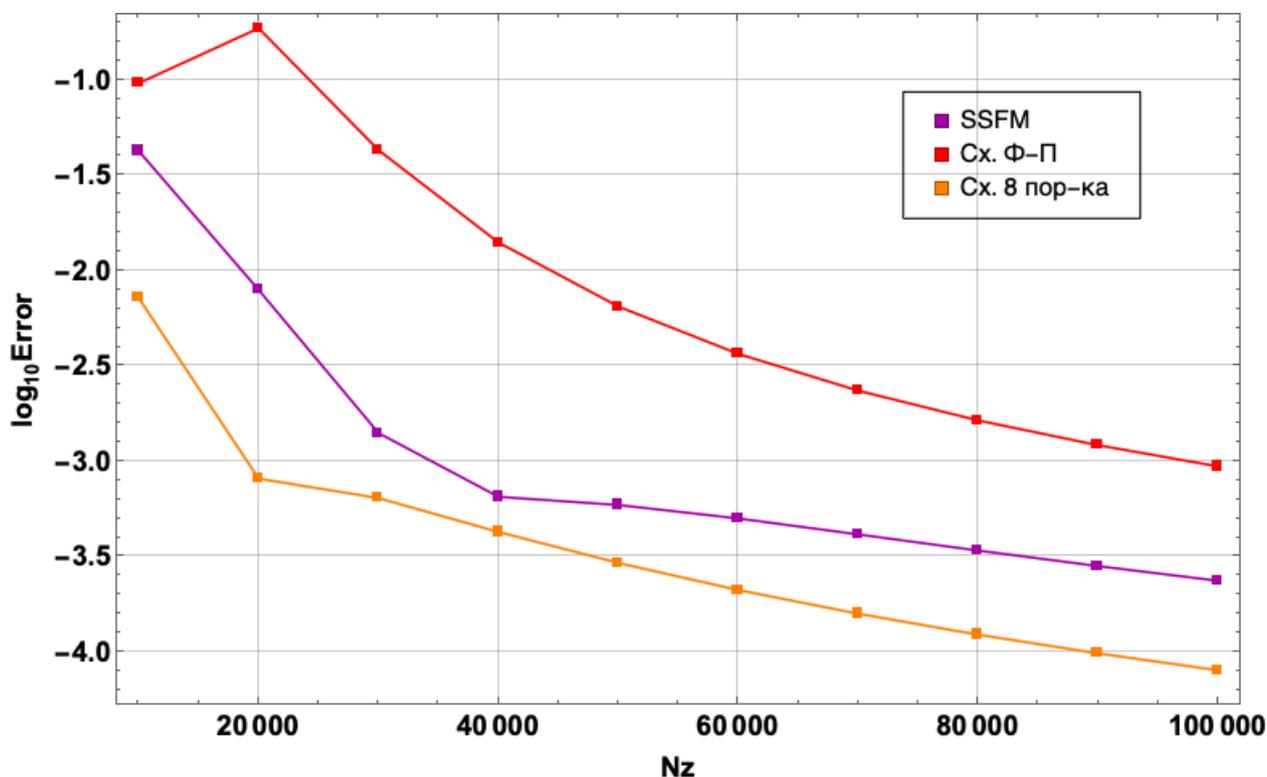


Рис. 3. Результаты расчетов солитона третьего порядка при фиксированном количестве точек по временной оси  $Nt = 16384$

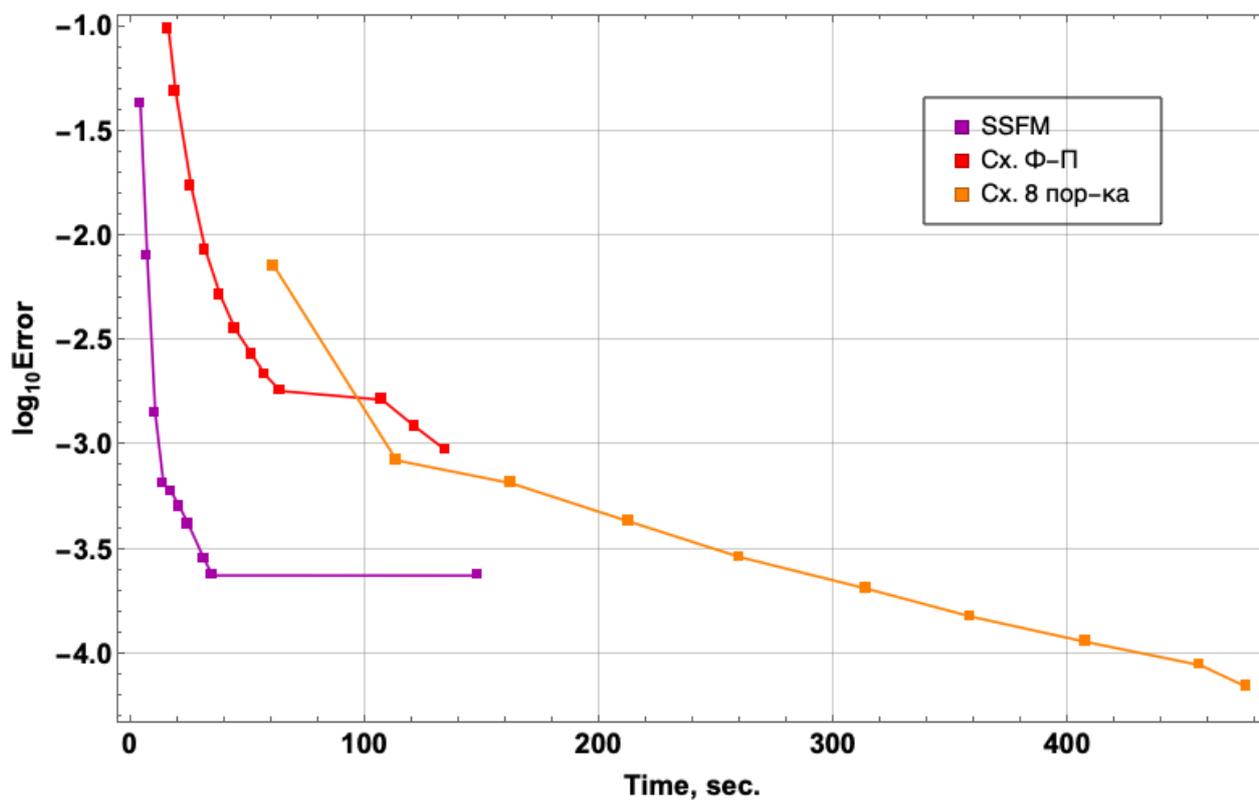


Рис. 4. Зависимость величины ошибки от времени при расчетах солитона третьего порядка

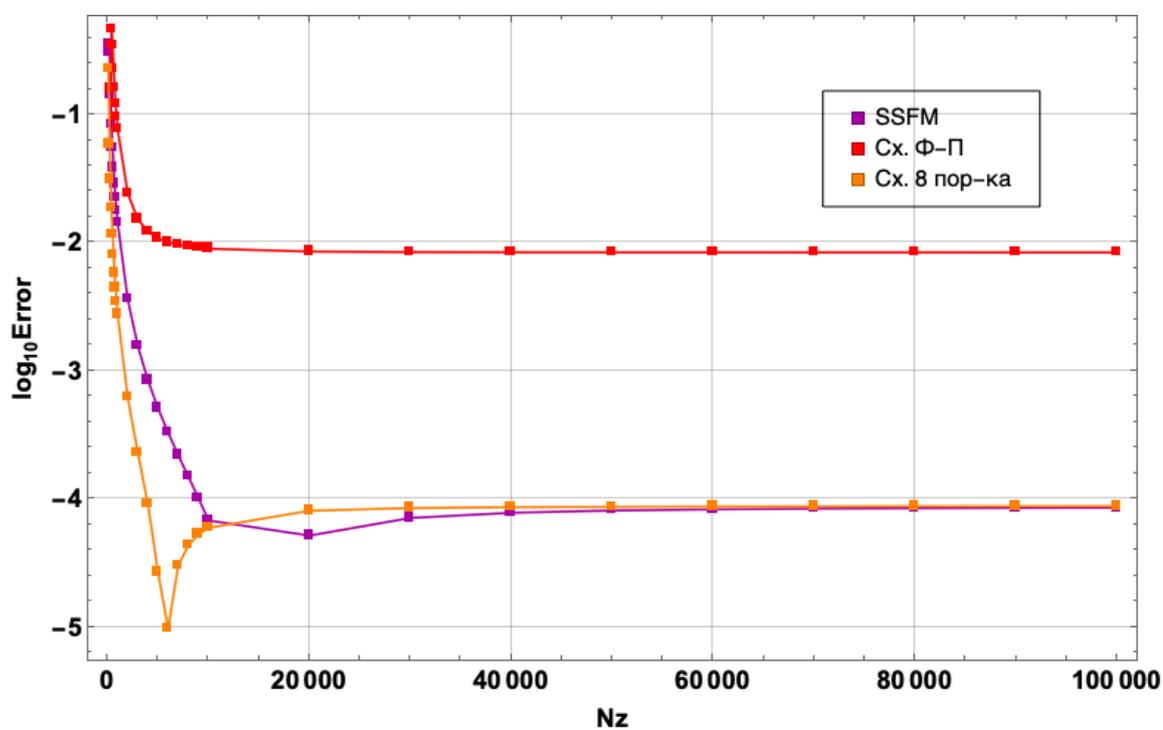


Рис. 5. Результаты расчетов солитона второго порядка при фиксированном количестве точек по временной оси  $Nt = 1\ 024$

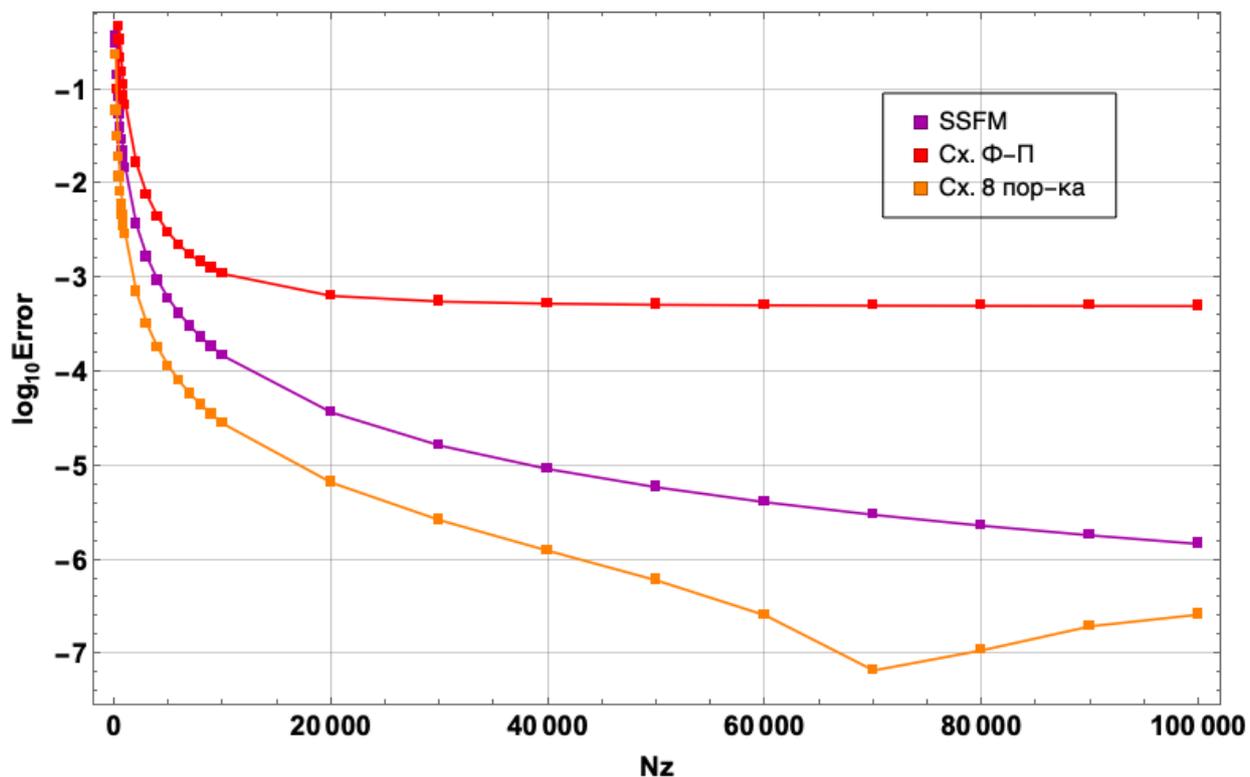


Рис. 6. Результаты расчетов солитона второго порядка при фиксированном количестве точек по временной оси  $Nt = 2\ 048$

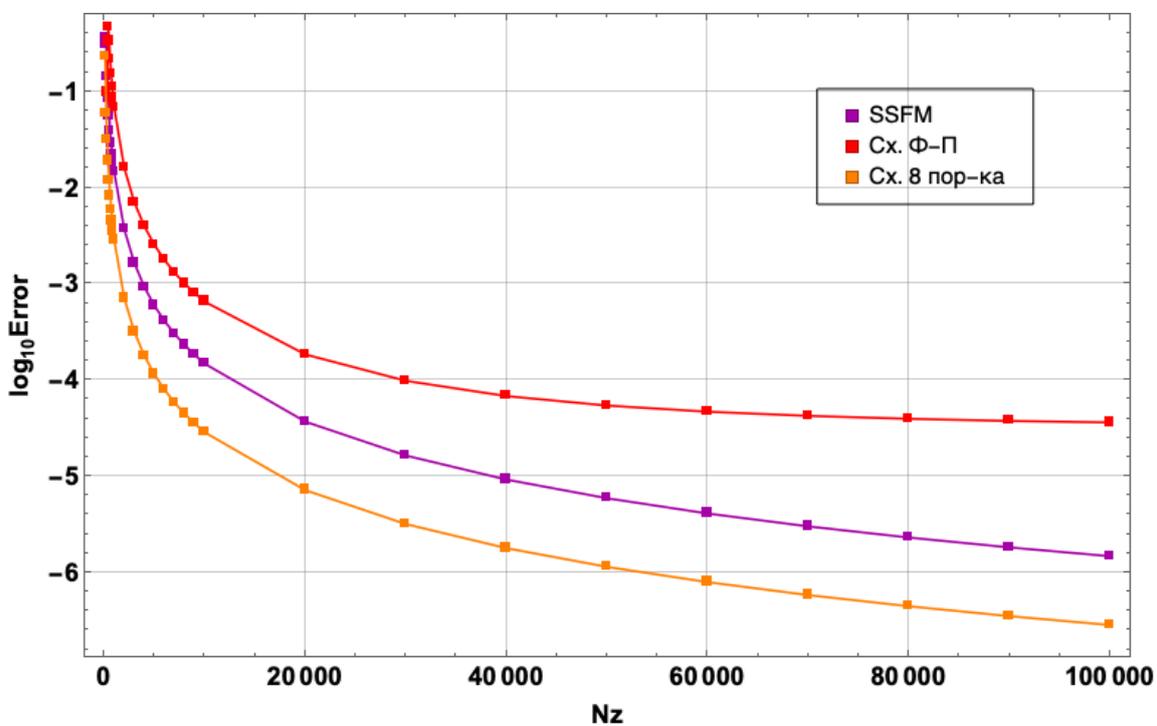


Рис. 7. Результаты расчетов солитона второго порядка при фиксированном количестве точек по временной оси  $Nt = 4\ 096$

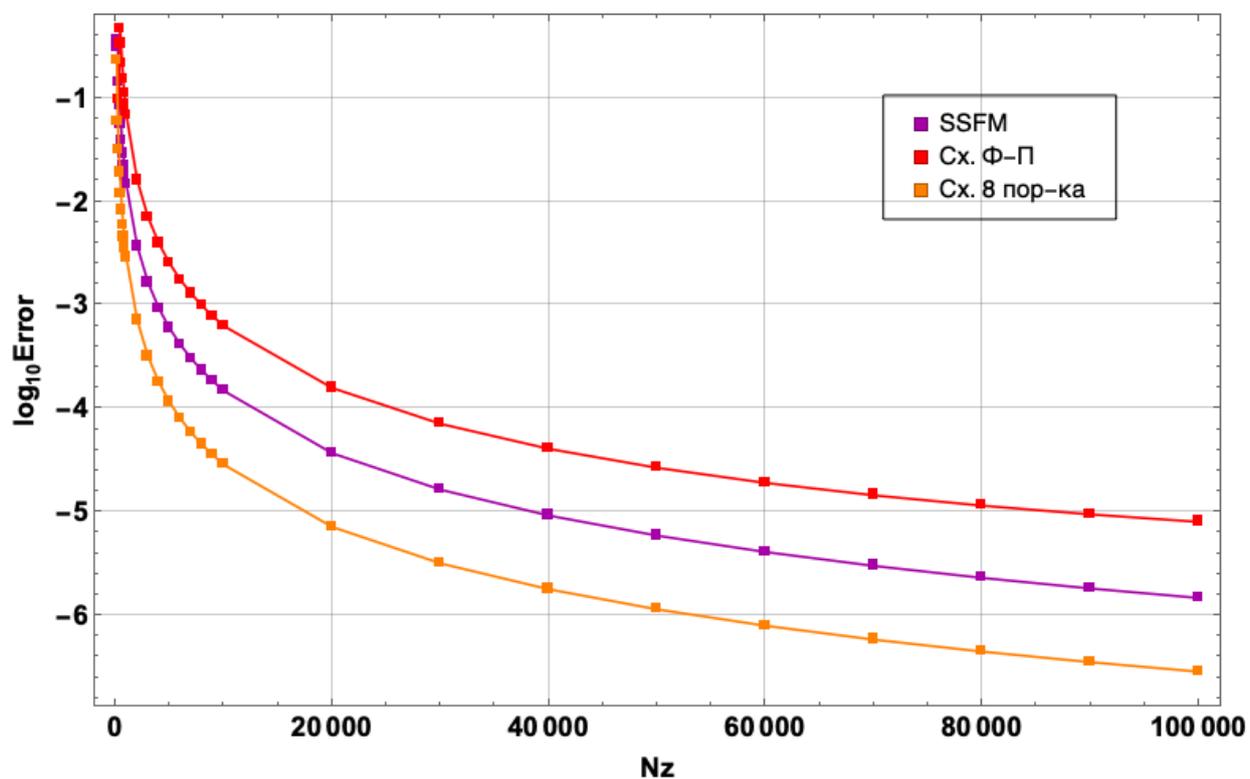


Рис. 8. Результаты расчетов солитона второго порядка при фиксированном количестве точек по временной оси  $Nt = 8\ 192$

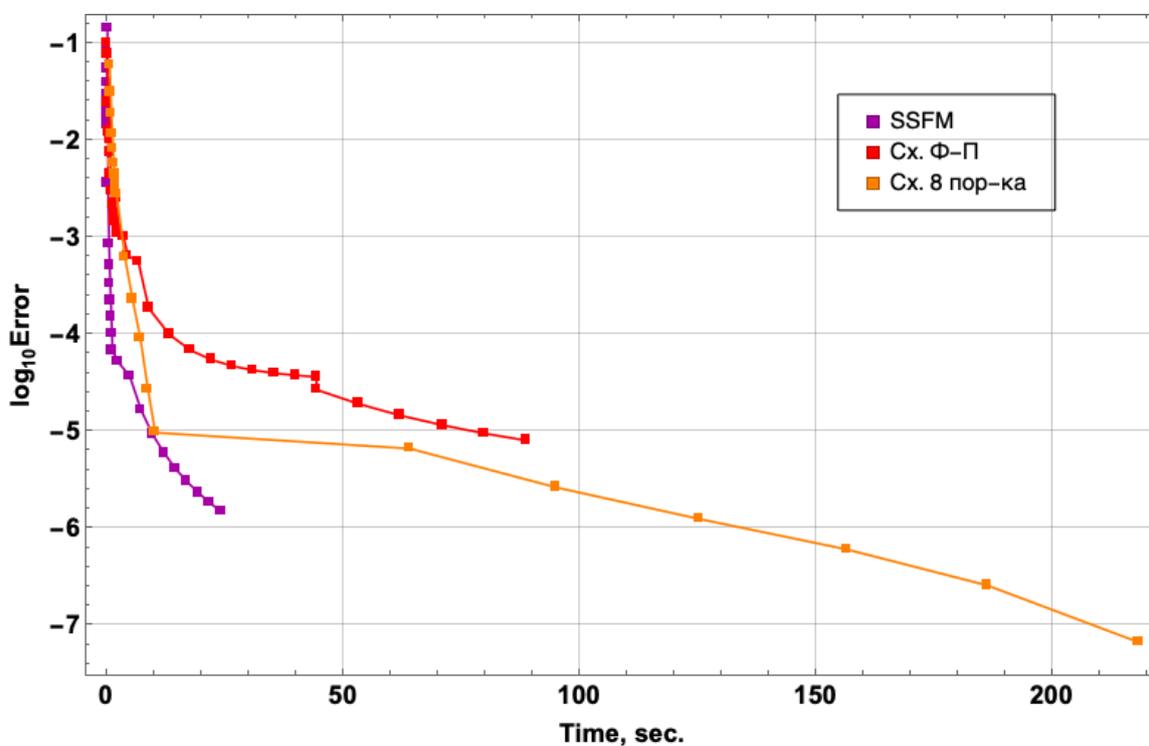


Рис. 9. Зависимость величины ошибки от времени при расчетах солитона второго порядка

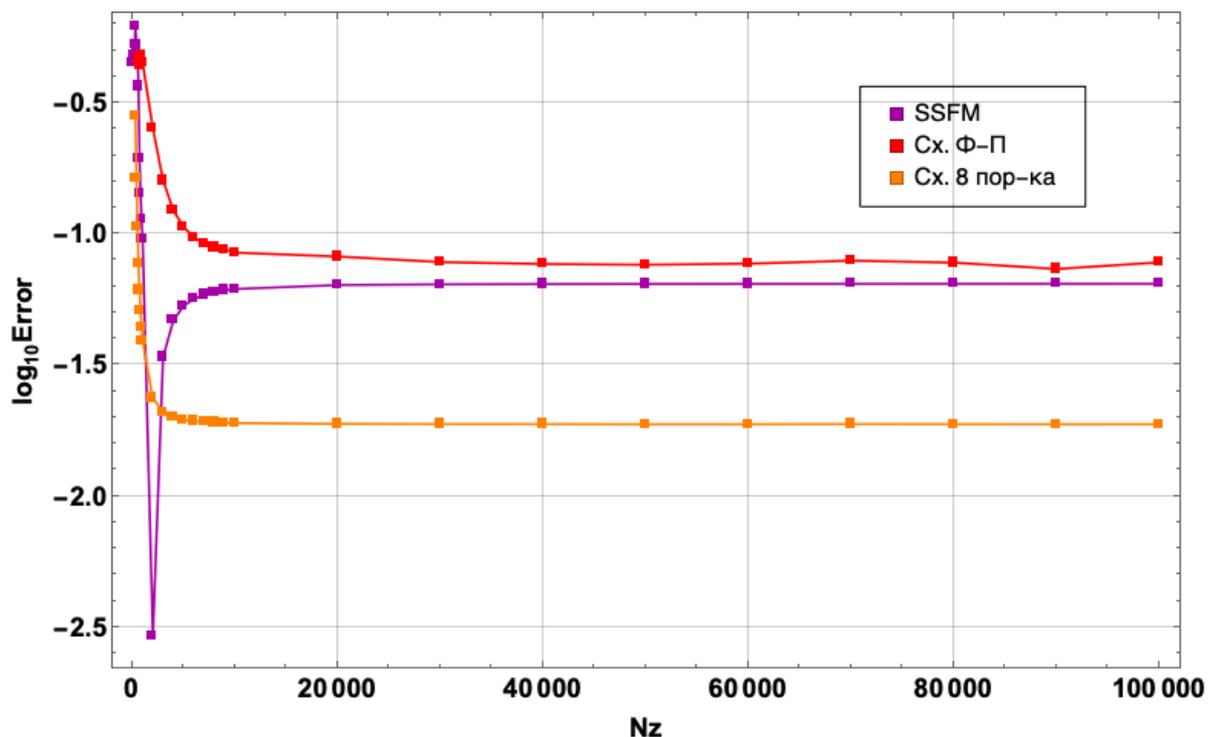


Рис. 10. Результаты расчетов оверсолитона с собственными значениями  $\eta_1 = 2$ ,  $\eta_2 = 1$  при фиксированном количестве точек по временной оси  $Nt = 1\ 024$

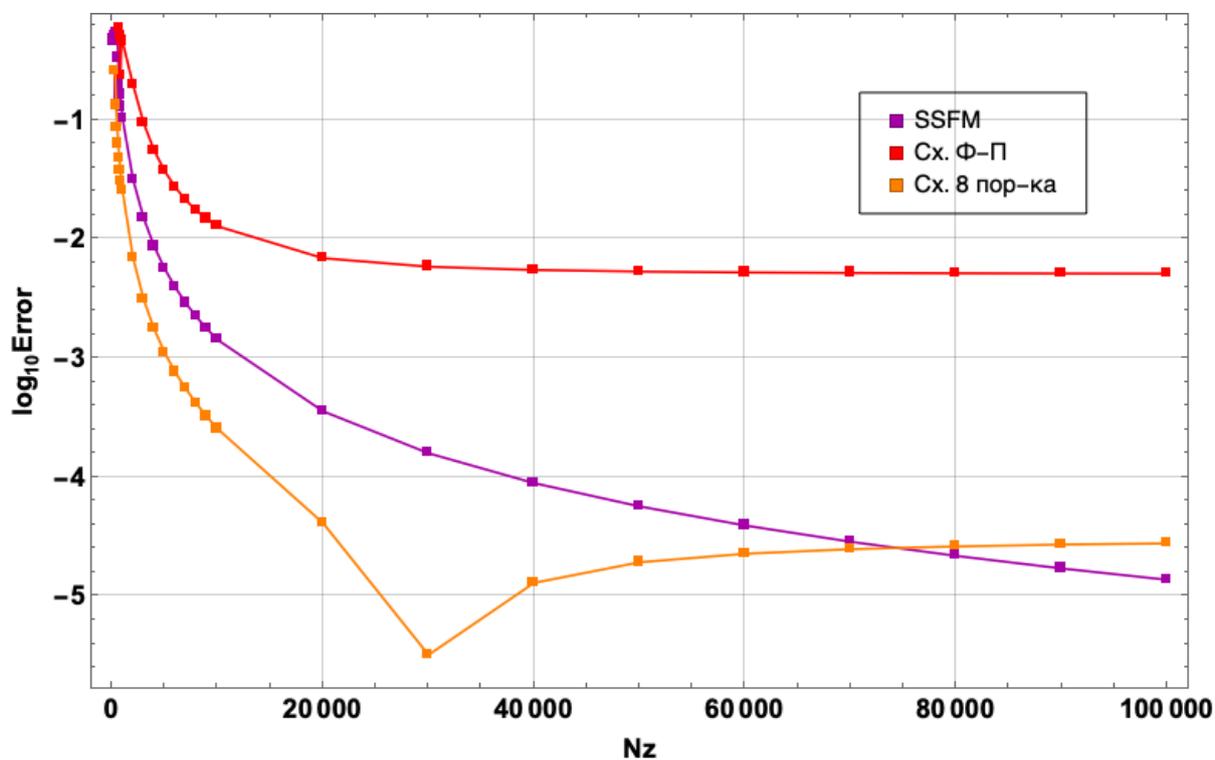


Рис. 11. Результаты расчетов оверсолитона с собственными значениями  $\eta_1 = 2$ ,  $\eta_2 = 1$  при фиксированном количестве точек по временной оси  $Nt = 2\ 048$

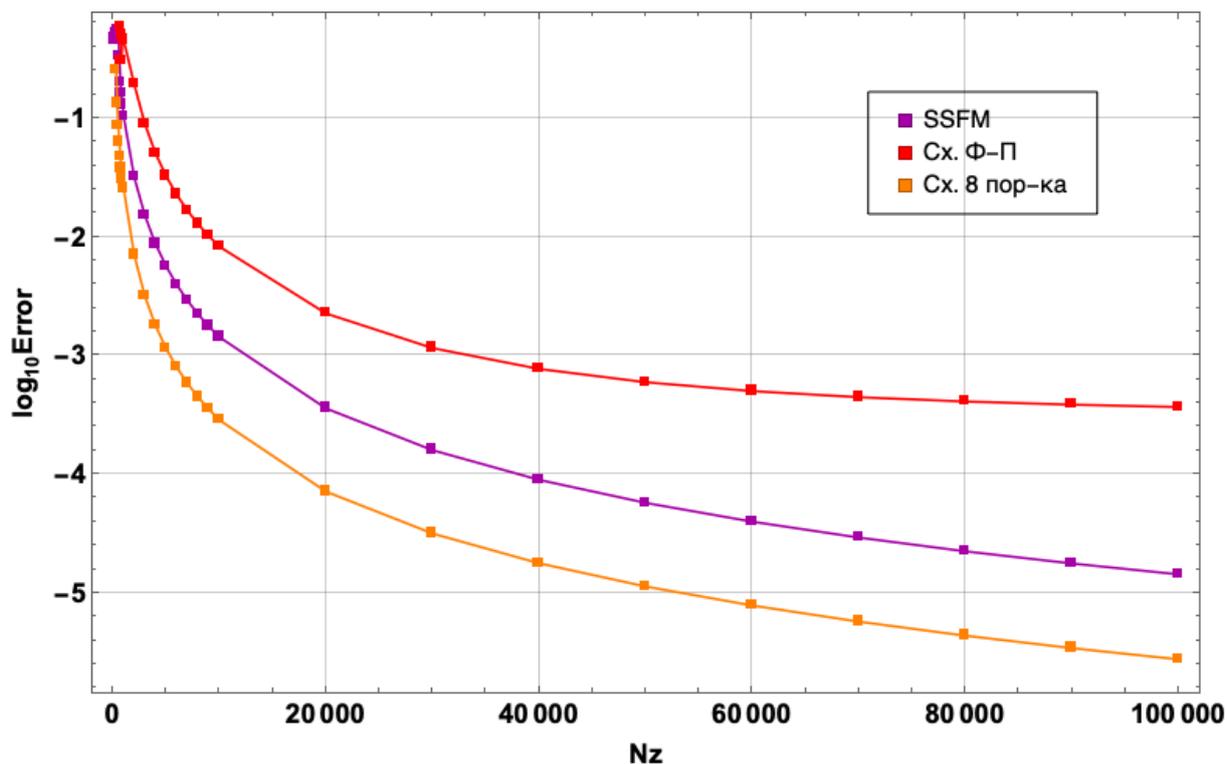


Рис. 12. Результаты расчетов оверсолитона с собственными значениями  $\eta_1 = 2, \eta_2 = 1$  при фиксированном количестве точек по временной оси  $Nt = 4\ 096$

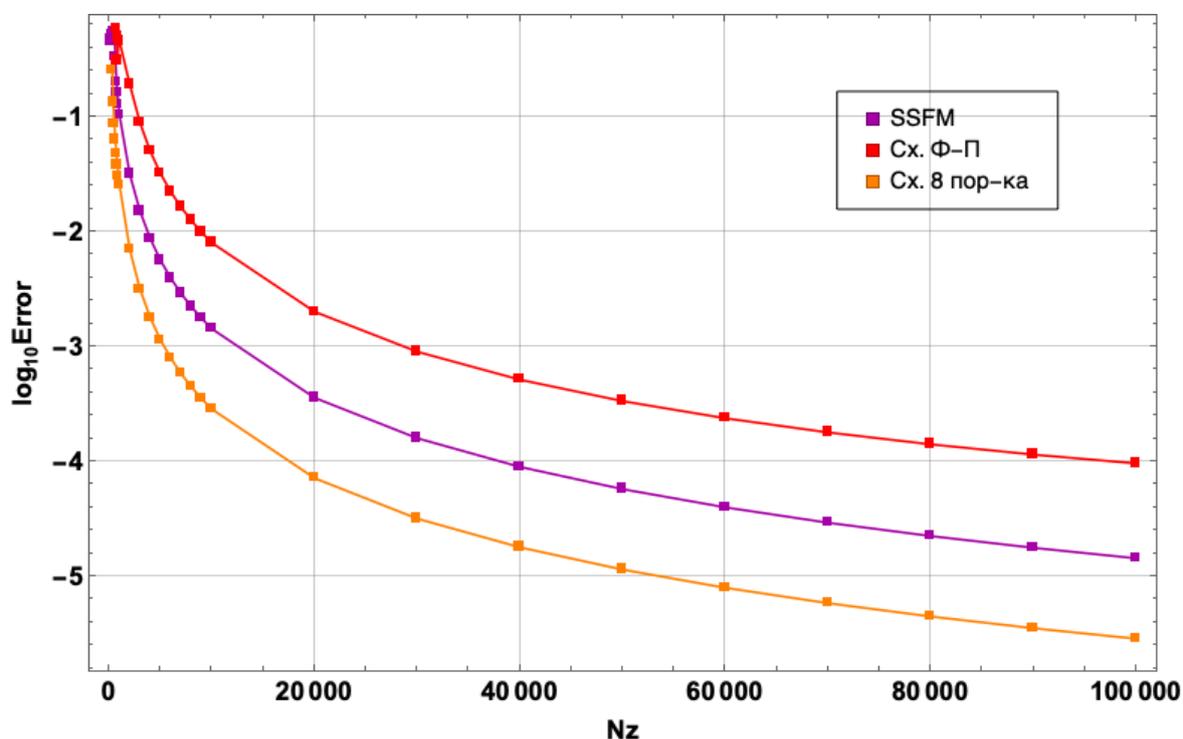


Рис. 13. Результаты расчетов оверсолитона с собственными значениями  $\eta_1 = 2, \eta_2 = 1$  при фиксированном количестве точек по временной оси  $Nt = 8\ 192$

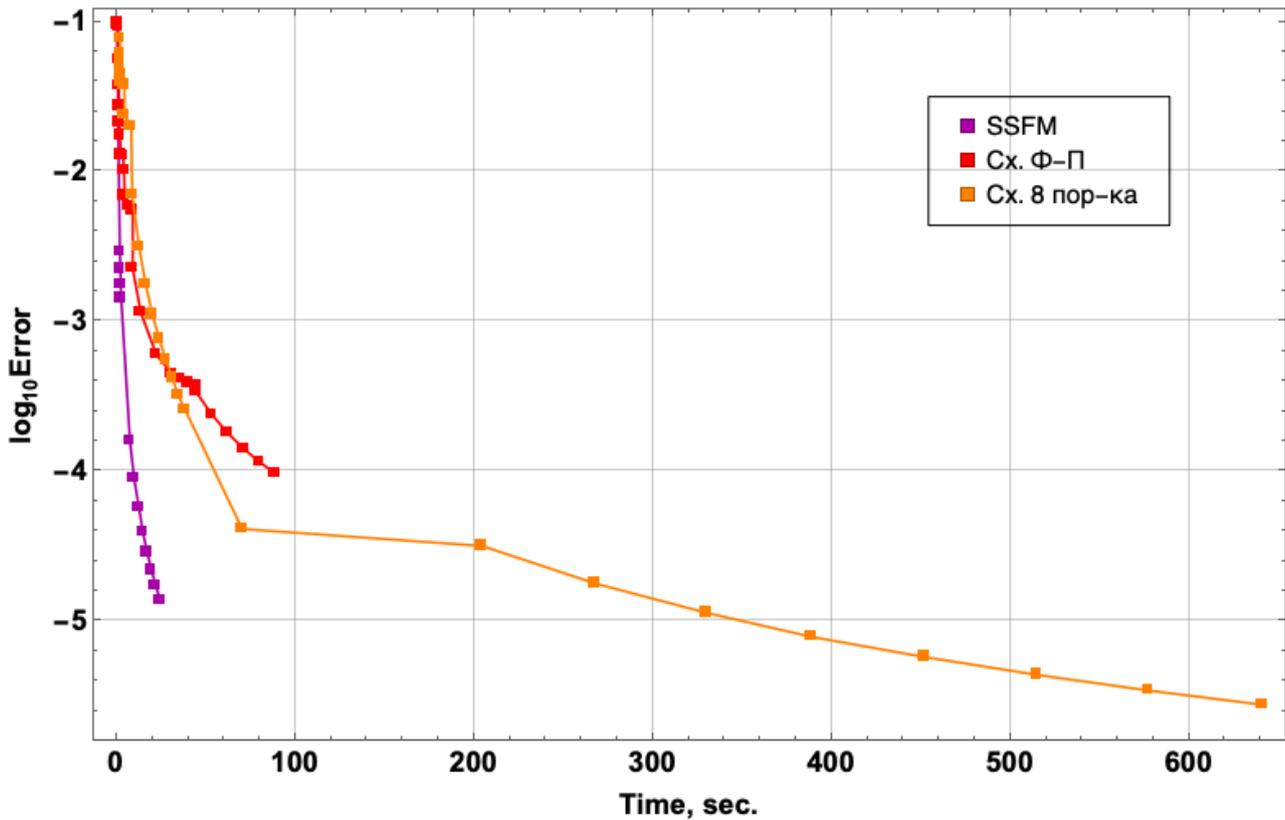


Рис. 14. Зависимость величины ошибки от времени при расчетах оверсолитона с собственными значениями  $\eta_1 = 2$ ,  $\eta_2 = 1$

Была рассмотрена схема Федорука – Паасонена с периодическими условиями с целью сопоставления влияния последних с влиянием нулевых граничных условий на численное решение. Полученные результаты расчетов погрешности для двух схем полностью совпадают, но из-за изменения реализации метода время выполнения программы выросло на порядок, поэтому в приведенных графиках зависимости ошибки от времени данная схема не фигурирует.

Приведенные зависимости показывают, что компактные схемы не уступают в точности методу Фурье, и, хотя при использованных параметрах расчетов SSFM выигрывает во времени, стоит отметить, что для конечно-разностных схем существует возможность параллельной реализации, которая позволит значительно ускорить выполнение вычислений.

### *Сравнение по BER-фактору на сигналах WDM*

WDM (Wavelength Division Multiplexing, спектральное уплотнение каналов) – технология уплотнения, позволяющая за счет разнесения начальных импульсов на разные частоты повысить пропускную способность линии связи.

В качестве начального импульса был выбран приподнятый косинус с параметром  $\beta = 0,2$ :

$$h(t) = \frac{\operatorname{sinc}\left(\frac{t}{T_0}\right) \cos\left(\frac{\pi\beta t}{T_0}\right)}{1 - \frac{4\beta^2 t^2}{T_0^2}}, \quad (15)$$

параметр  $\beta$  определяет в том числе ширину спектра импульса, в связи с чем межканальное расстояние для генерируемой последовательности было выбрано равным 1,3.

Перечень характерных величин для волокна представлен в табл. 4 (для расчета линий связи используется средняя мощность, обозначенная через  $A_0^2$ ).

Таблица 4

Параметры моделируемого волокна

Параметр	Значение
$A_0^2$	0,1 мВт
$T_0$	10 пс
$\beta_2$	21,7 пс <sup>2</sup> /км
$\gamma$	1,3 Вт <sup>-1</sup> км <sup>-1</sup>
$R_s$	32 ГБод

Параметр  $P_0$  нормировки импульса подбирается таким образом, чтобы средняя мощность исходного сигнала равнялась заданной величине, т. е.

$$\frac{\|A\|_{L_2}^2}{NT_s} := \frac{\int_{-\frac{NT_s}{2}}^{\frac{NT_s}{2}} |A|^2 d\tau}{NT_s} = 0,1 \text{ мВт}, \text{ где } N - \text{ количество WDM-символов, а } T_s - \text{ длительность одного символа в системе связи.}$$

Параметр  $P_0$  нормировки импульса подбирается таким образом, чтобы средняя мощность исходного сигнала равнялась заданной величине, т. е.

BER (Bit Error Ratio) – отношение неправильно принятых битов к количеству отправленных. Для подсчета BER компенсируется дисперсия, а после выполняется демодуляция сигнала, в результате определяется последовательность битов на приемнике.

Для сравнения по BER был построен сигнал из  $2^{13}$  WDM-символов с пятью каналами и форматом модуляции 16QAM, часто используемым при передаче данных, рассмотренный в расчетной области, равной  $2^{14}$ . Сигнал передавался на расстояние 1 000 километров.

Ниже приведены результаты расчета BER на рис. 15–17.

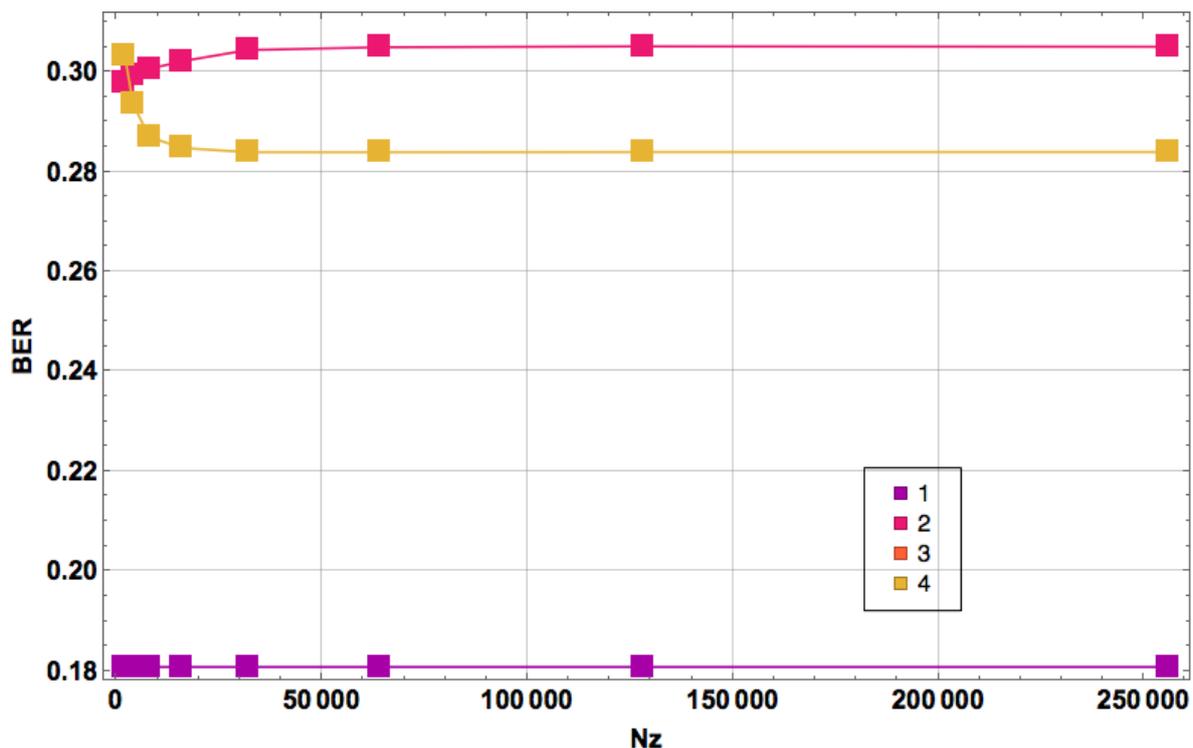


Рис. 15. Расчет BER при фиксированном количестве точек по времени на символ  $Incr = 4$

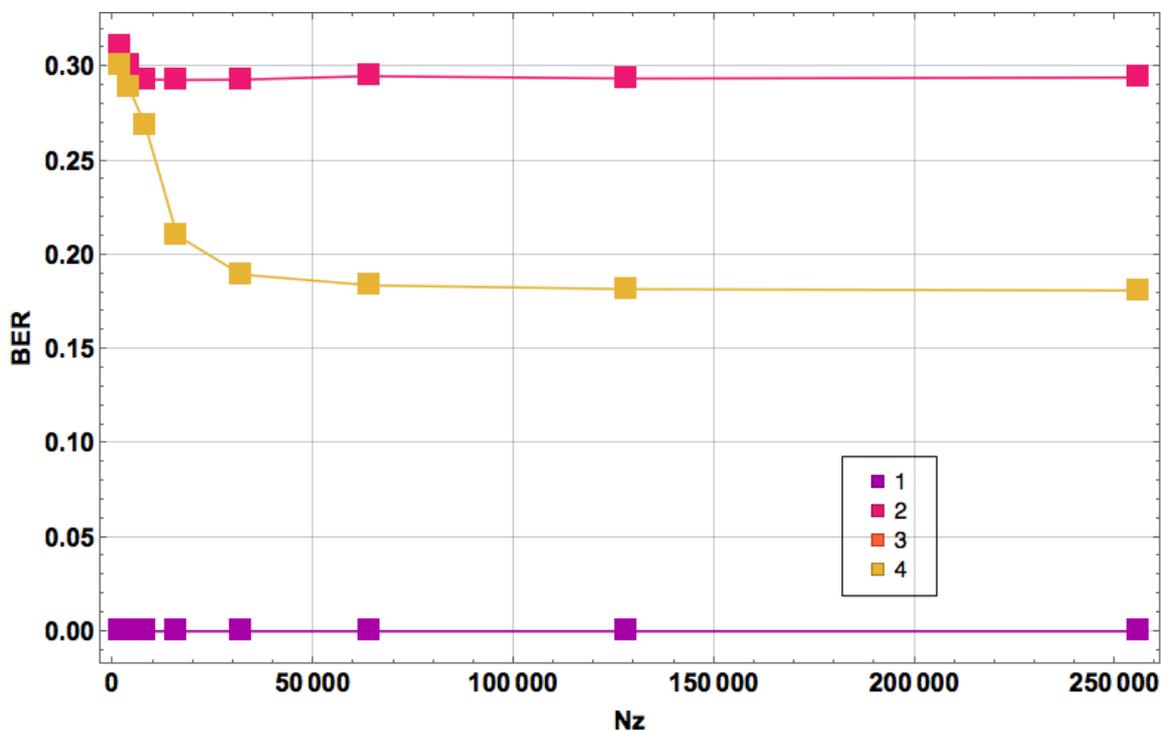


Рис. 16. Расчет BER при фиксированном количестве точек по времени на символ  $Incr = 8$

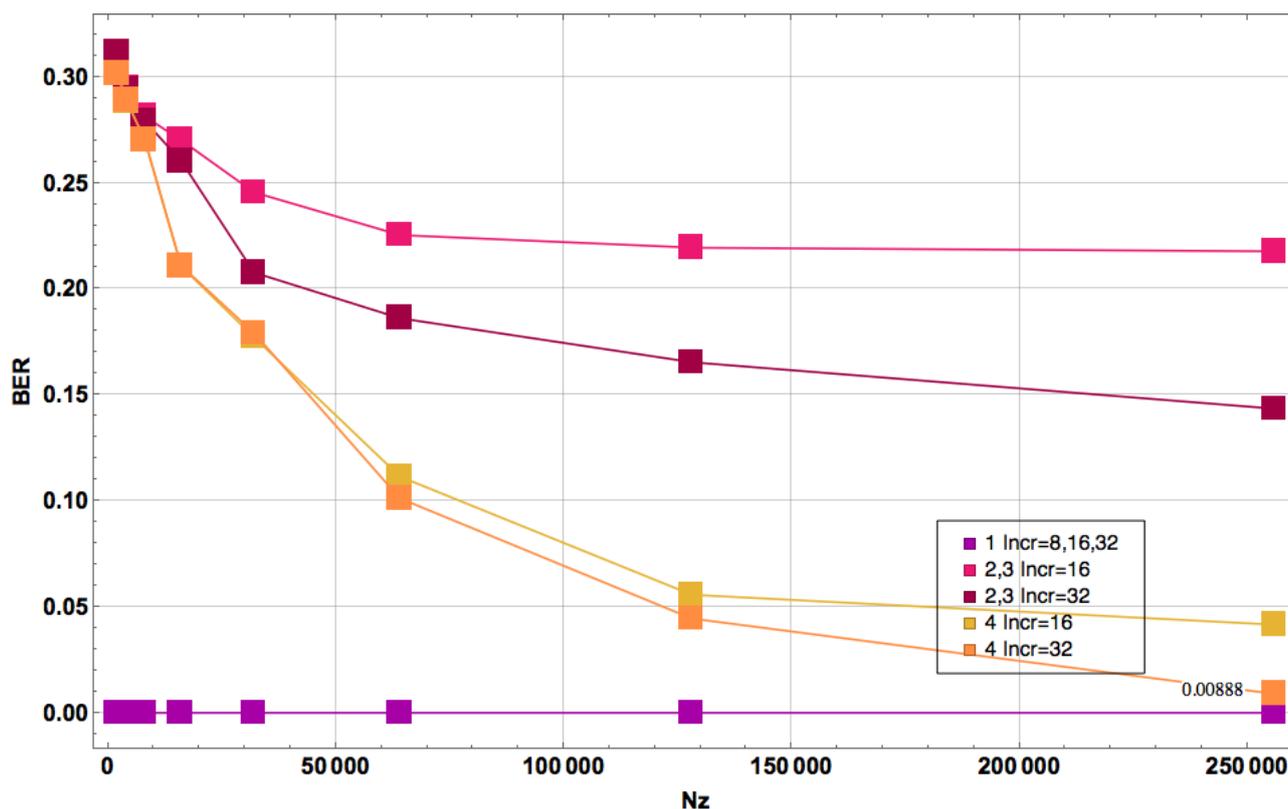


Рис. 17. Расчет BER при фиксированном количестве точек по времени на символ  $\text{Incr} = 16$

На рис. 15–17:  $N_z$  – количество точек по пространству;  $\text{Incr}$  – количество точек по времени на символ; 1 – SSFM; 2 – схема Федорука – Паасонена; 3 – схема Федорука – Паасонена с периодическими граничными условиями; 4 – схема восьмого порядка точности.

Результаты для схем Федорука – Паасонена с различными граничными условиями совпадают.

При выбранных параметрах данные конечно-разностные методы не показали требуемой точности даже на сетках более чем в 128 раз мельче, чем та, которая требуется для SSFM.

### ***Сравнение по BER-фактору на сигналах OFDM***

OFDM (Orthogonal Frequency-Division Multiplexing, мультиплексирование с ортогональным частотным разделением каналов) – еще одна технология уплотнения сигнала, являющаяся частным случаем WDM. OFDM-импульс строится из последовательности массивов, каждый такой массив в дальнейшем называется OFDM-символом. Он представляет собой набор случайно сгенерированных чисел, соответствующих, в нашем случае, формату модуляции 16QAM, к которому применено обратное преобразование Фурье.

Символьный интервал  $T_s$  определяется для OFDM-символа из формулы  $BW = \frac{K}{T_s}$ , где  $BW$  – ширина спектра, а  $K$  – число каналов.  $BW$  был выбран равным 100 ГГц, число каналов  $K = 128$ , отсюда находим символьный интервал  $T_s = 1\,280$  пс. Соответственно нормировка  $T_0$  была изменена на 1 000 пс. Для полученного распределения расчетная область была выбрана равной 128. Результаты расчетов приведены на рис. 18–21.

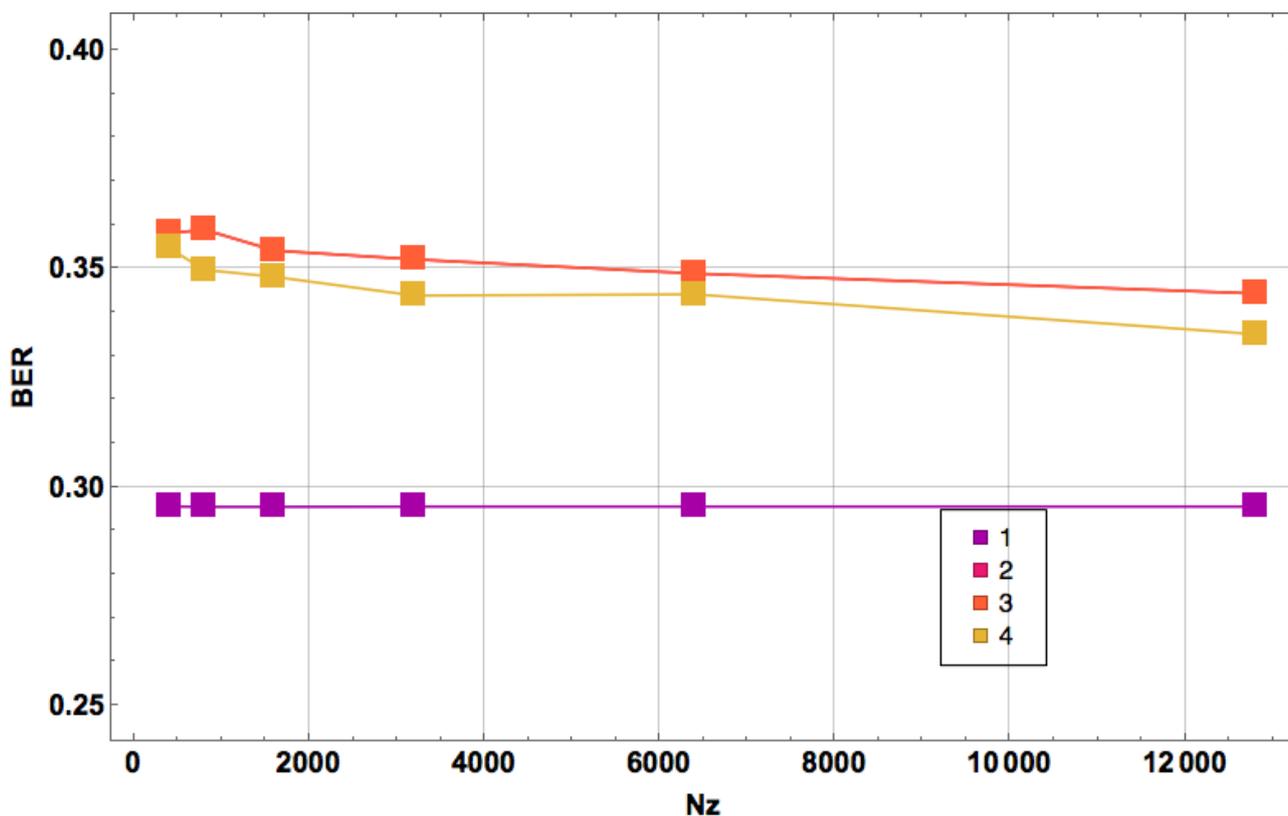


Рис. 18. Расчет BER при фиксированном количестве точек по времени на поднесущую в OFDM-символе  $Incr = 2$

На рис. 18–21:  $N_z$  – количество точек по пространству;  $Incr$  – параметр дискретизации генерируемого сигнала – количество точек по времени на поднесущую в OFDM-символе; 1 – SSFM; 2 – схема Федорука – Паасонена; 3 – схема Федорука – Паасонена с периодическими граничными условиями; 4 – схема восьмого порядка точности.

При данных параметрах расчетов конечно-разностные схемы не достигли полученного при расчете SSFM показателя BER. Дальнейшее увеличение дискретизации сетки не является целесообразным, так как параметры расчета будут значительно превышать требуемые значения шагов для SSFM при достижении оптимального BER.

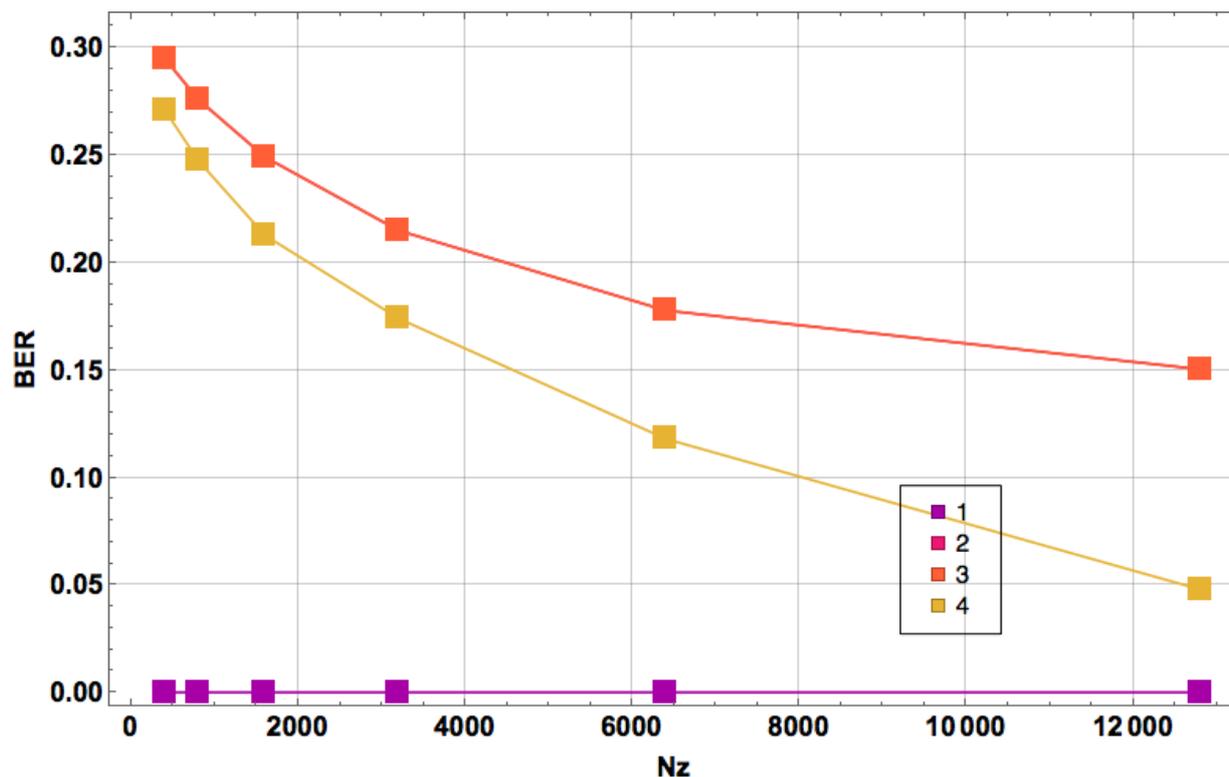


Рис. 19. Расчет BER при фиксированном количестве точек по времени на поднесущую в OFDM-символе  $Incr = 4$

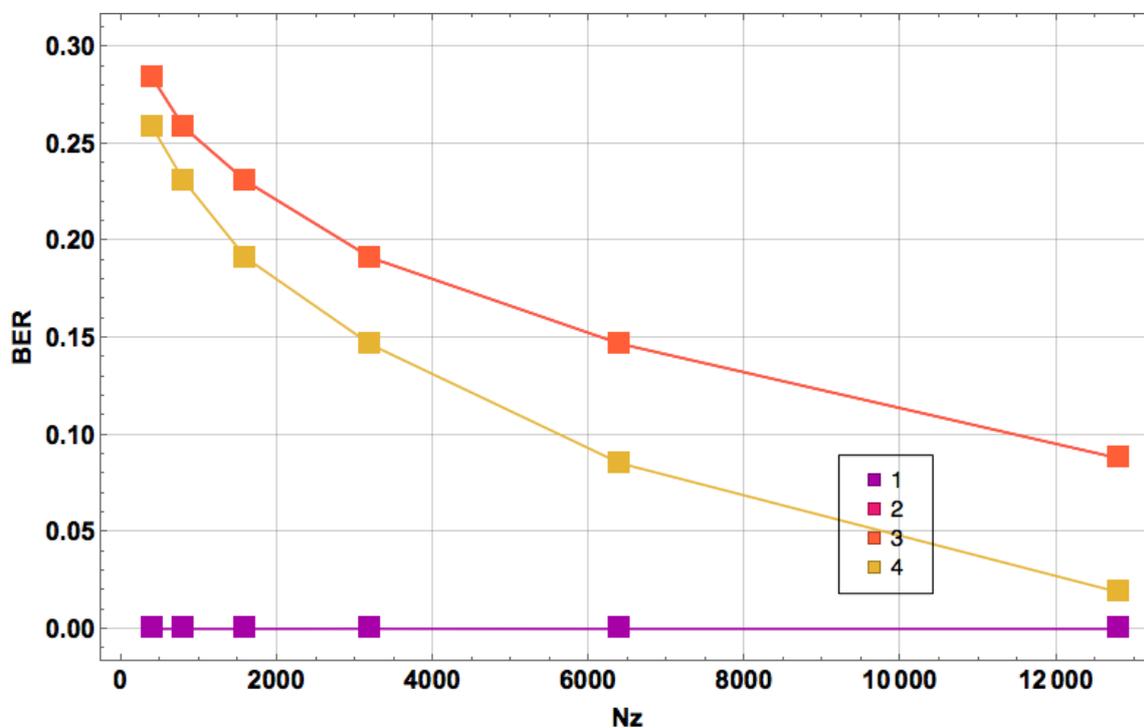


Рис. 20. Расчет BER при фиксированном количестве точек по времени на поднесущую в OFDM-символе  $Incr = 8$

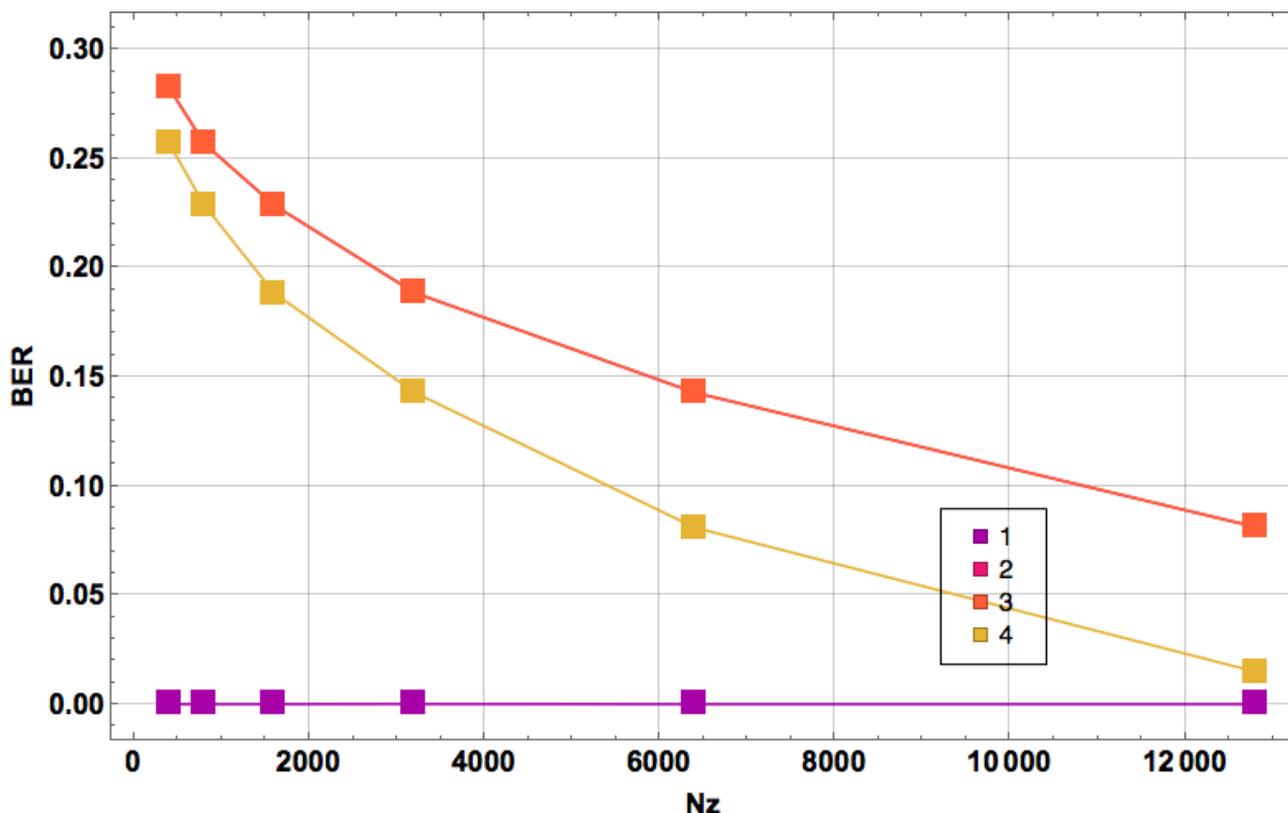


Рис. 21. Расчет BER при фиксированном количестве точек по времени на поднесущую в OFDM-символе  $\text{Incr} = 16$

### Заключение

В ходе исследования сравнивались семь схем: явная, неявная, схема Кранка – Николсон, итерационная и безытерационная схемы Федорука – Паасонена, схема восьмого порядка точности и Фурье-метод расщепления по физическим факторам. Первые три схемы оказались неэффективными и были исключены из рассмотрения после первого этапа отбора. Согласно полученным результатам, можно сделать следующие выводы.

1. Компактные схемы не уступают в точности спектральному методу Фурье при расчетах фундаментального солитона и представленных в статье потенциалах. Однако спектральному методу требуется меньшее число узлов временной сетки, что позволяет сэкономить на времени расчетов. Но стоит отметить, что, в отличие от метода Фурье, конечно-разностные схемы легко можно реализовать на нескольких процессорах с использованием, например, стандарта OMP, что позволит сократить время вычислений в разы, особенно заметно это может проявиться при моделировании более широких импульсов.

2. При моделировании же волокна с реальными параметрами результаты расчетов показывают, что компактные схемы, рассмотренные в статье, не могут конкурировать с SSFM.

Полученные выводы можно объяснить тем, что погрешность в методе Фурье вносится лишь из-за расщепления уравнения, а сами нелинейный и дисперсионный операторы вычисляются точно. При расчете линий связи нелинейный член мал, в отличие от расчетов солитонных решений, соответственно, численное решение, получаемое с помощью SSFM, является «почти точным».

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Теория солитонов: метод обратной задачи / В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский. – М. : Наука, 1980.
2. Taha T. R., Ablowitz M. I. Analytical and numerical aspects of certain nonlinear evolution equations. II. Numerical, nonlinear Schrodinger equation. Journal of Computational Physics // Journal of Computational Physics. – Volume 55, Issue 2, August 1984. – P. 203–230.
3. Tingchun W. Convergence of an Eighth-Order Compact Difference Scheme for the Nonlinear Schrodinger Equation // Advances in Numerical Analysis. – Volume 2012, August 2012. – 24 p.
4. Федорук М. П., Паасонен В. И. Компактная диссипативная схема для нелинейного уравнения Шредингера // Вычислительные технологии. – 2011. – Т. 16, № 6. – С. 68–73.
5. Numerical approaches to simulation of multi-core fibers / I. S. Chekhovskoy, V. I. Paasonen, O. V. Shtyrina, M. P. Fedoruk // Journal of Computational Physics. – Volume 334, 1 April 2017. – P. 31–44.
6. Satsuma J., Yajima N. Initial Value Problems of One-Dimensional Self-Modulation of Nonlinear Waves in Dispersive Media // Supplement of the Progress of Theoretical Physics, No. 55, 1974.

Получено 09.04.2019

© П. А. Карпик, 2019

#### INVESTIGATION OF DIFFERNECE SCHEMES FOR SOLVING THE NONLINEAR SHRODINGER EQUATION

*Pavel A. Karpik*

Novosibirsk State University, 2, Pirogova St., Novosibirsk, 630090, Russia, Student, phone: (983)319-08-09, e-mail: karpikpavel@yandex.ru

This paper studies difference schemes for solving the nonlinear Schrodinger equation (NLSE). In addition to well – known methods such as: an implicit, an explicit method, Crank-Nicolson Implicit and Richardson schemes, and Split Step Fourier Method, new compact difference schemes are introduced. The analysis and the comparison of the methods are conducted in two different metrics. For computation, besides a standard soliton – solution, which is frequently used in such works, 16QAM-modulated signals are examined. What is more, exact potentials obtained by solving the inverse and direct Zakharov – Shabat problems for reflectionless potential were also constructed and used to compare the schemes.

**Key words:** difference schemes, the nonlinear Schrodinger equation, compact difference schemes, 16QAM-modulated signals, reflectionless potential, inverse and direct Zakharov – Shabat problems.

## REFERENCES

1. Zaharov, V. E., Manakov, S. V., Novikov, S. P., & Pitaevskij, L. P. (1980). *Teoriya solitonov: metod obratnoj zadachi [Soliton Theory: Inverse Problem Method]*. Moscow: Nauka Publ. [in Russian].
2. Taha, T. R., & Ablowitz, M. I. (1984). Analytical and numerical aspects of certain nonlinear evolution equations. II. Numerical, nonlinear Schrodinger equation. *Journal of Computational Physics*, 55(2), 203–230.
3. Tingchun, W. (2012). Convergence of an Eighth-Order Compact Difference Scheme for the Nonlinear Schrodinger Equation. *Advances in Numerical Analysis*, 2012, 24 p.
4. Fedoruk, M. P., & Paasonen, V. I. (2011). Kompaktnaya dissipativnaya skhema dlya nelinejnogo uravneniya Shredingera. *Vychislitel'nye tekhnologii [Computational Technologies]*, 16(6), 68–73 [in Russian].
5. Chekhovskoy, I. S., Paasonen, V. I., Shtyrina, O. V., & Fedoruk, M. P. (2017). Numerical approaches to simulation of multi-core fibers. *Journal of Computational Physics*, 334, 31–44.
6. Satsuma, J., & Yajima, N. (1974). Initial Value Problems of One-Dimensional Self-Modulation of Nonlinear Waves in Dispersive Media. *Supplement of the Progress of Theoretical Physics*, 55.

Received 09.04.2019

© P. A. Karpik, 2019